• DEWI NUHARINI • TRI WAHYUNI

MATEMATIKA

KONSEP DAN APLIKASINYA

2

Germany Italy Norway

Untuk Kelas VIII SMP dan MTs

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

DEWI NUHARINI • TRI WAHYUNI

MATEMATIKA

KONSEP DAN APLIKASINYA

Untuk Kelas VIII SMP dan MTs

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA

KONSEP DAN APLIKASINYA

Untuk SMP/MTs Kelas VIII

Penulis	:	Dewi Nuharini
		Tri Wahyuni
Editor	:	Indratno
Perancang Kulit	:	Risa Ardiyanto
Ilustrasi, Tata Letak	:	Risa Ardiyanto

Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

410
NUH NUHARINI, Dewi
m Matematika Konsep dan Aplikasinya: untuk SMP/MTs Kelas VIII/ oleh Dewi Nuharini dan Tri Wahyuni; editor Indratno. — Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
viii, 252 hlm.: ilus.; 25 cm.
Bibliografi : hlm. 244
Indeks. hlm.
ISBN 979-462-999-5
1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Wahyuni, Tri III. Indratno

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

KATA SAMBUTAN

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis /penerbit untuk disebarlu askan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008

Kepala Pusat Perbukuan

KATA PENGANTAR

Buku *Matematika Konsep dan Aplikasinya 2* ini membantumu belajar matematika dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari. Buku ini disusun dengan menggunakan bahasa yang mudah kamu pahami. Di dalam buku ini kamu akan menjumpai soal-soal yang dapat melatih keterampilanmu. Dengan harapan, kamu akan lebih tertarik dan suka belajar matematika.

Setiap awal bab di buku ini disajikan kover bab. Bagian ini berisi ilustrasi dan deskripsi singkat yang menarik berkaitan dengan materi bab yang bersangkutan. Selain itu, di awal bab juga disajikan tujuan pembelajaran yang harus kamu capai dalam setiap bab. Kata-kata kunci merupakan inti dari materi. Bacalah terlebih dahulu kata-kata kuncinya sebelum kamu mempelajari isi materi.

Di dalam buku ini disajikan *Tugas Mandiri* yang akan meningkatkan pemahaman kamu terhadap konsep yang telah kamu pelajari. *Diskusi* akan mendorongmu untuk lebih bersemangat dalam bekerja sama. *Soal Tantangan* akan memotivasi kamu dalam memahami konsep. *Pelangi Matematika* akan menambah pengetahuan dan wawasan kamu mengenai tokoh yang berjasa besar pada konsep yang sedang dipelajari. *Tips* akan membantumu memahami konsep yang sedang kamu pelajari. Di bagian akhir setiap bab dilengkapi dengan soal-soal untuk mengevaluasi kompetensi yang telah kamu capai setelah mempelajari satu bab.

Akhirnya, semoga buku ini bermanfaat dan jangan segan untuk bertanya jika kamu menemui kesulitan. Selamat belajar, semoga sukses.

Surakarta, Mei 2008

Penulis

SAJIAN ISI BUKU

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern. Matematika mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu sehingga memajukan daya pikir manusia. Mata pelajaran matematika diberikan kepada siswa mulai dari sekolah dasar untuk membekali siswa dengan kemampuan bekerja sama.

Pembelajaran matematika di buku ini dimulai dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (*contextual problem*). Dengan mengajukan masalah kontekstual, siswa secara bertahap dibimbing untuk menguasai konsep matematika. Sekolah diharapkan menggunakan teknologi informasi dan komunikasi seperti komputer, alat peraga, atau media lainnya untuk meningkatkan keefektifan pembelajaran.

Buku *Matematika Konsep dan Aplikasinya 2* ini diperuntukkan bagi siswa kelas VIII SMP/MTs. Materi pembelajaran buku ini mengacu pada Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Matematika SMP/MTs tahun 2006. Kajian materi buku ini meliputi dua aspek, yaitu *aspek aljabar* serta *aspek geometri dan pengukuran*. Untuk memudahkan pembahasan, buku ini terbagi ke dalam sembilan bab sebagai berikut.

Bab 1 Faktorisasi Suku Aljabar

Bab ini memuat materi mengenai operasi tambah, kurang, kali, bagi, dan pangkat pada bentuk aljabar; cara menentukan faktor pada suku aljabar; serta cara menguraikan bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya.

Bab 2 Fungsi

Bab ini berisi materi mengenai cara menyatakan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan relasi dan fungsi; menyatakan suatu fungsi dengan notasi; menghitung nilai fungsi; menentukan bentuk fungsi jika nilai dan data fungsi diketahui; cara menyusun tabel pasangan nilai peubah dengan nilai fungsi; serta cara menggambar grafik fungsi pada koordinat Cartesius.

Bab 3 Persamaan Garis Lurus

Bab ini memuat materi mengenai pengertian gradien dan cara menentukan gradien garis lurus dalam berbagai bentuk; cara menentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik, atau melalui satu titik dengan gradien tertentu; serta cara menggambar grafik garis lurus jika diketahui persamaannya.

Bab 4 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bab ini berisi uraian materi mengenai perbedaan persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel; mengenal sistem persamaan linear dua variabel; menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan berbagai cara; membuat model matematika dan menyelesaikannya dari masalah sehari-hari yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel.

Bab 5 Teorema Pythagoras

Bab ini memuat materi mengenai cara menemukan teorema Pythagoras; menghitung panjang sisi segitiga siku-siku jika dua sisi lain diketahui; menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa; dan menggunakan teorema Pythagoras untuk menghitung panjang diagonal, atau sisi pada bangun datar.

Bab 6 Lingkaran

Bab ini berisi materi mengenai bagian-bagian lingkaran; cara menemukan nilai pi; menentukan serta menghitung keliling dan luas lingkaran; mengenal hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling jika menghadap busur yang sama; menentukan besar sudut keliling jika menghadap diameter dan busur yang sama; menentukan panjang busur, luas juring, dan luas tembereng; serta menggunakan hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring dalam pemecahan masalah. Pada bab ini disediakan pula materi pengayaan, yaitu materi mengenai segi empat tali busur, meliputi pengertian dan sifat-sifatnya; serta uraian materi mengenai sudut antara dua tali busur.

Bab 7 Garis Singgung Lingkaran

Bab ini memuat materi mengenai garis singgung lingkaran, meliputi sifat garis singgung lingkaran; mengenali dan menentukan panjang garis singgung persekutuan dalam dan persekutuan luar dua lingkaran; serta cara melukis dan menentukan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga.

Bab 8 Kubus dan Balok

Bab ini berisi uraian materi mengenai unsur-unsur kubus dan balok; jaring-jaring kubus dan balok; menemukan rumus dan menghitung luas permukaan kubus dan balok; serta menemukan rumus dan menghitung volume kubus dan balok.

Bab 9 Bangun Ruang Sisi Datar Limas dan Prisma Tegak

Bab ini memuat materi mengenai unsur-unsur prisma dan limas; jaring-jaring prisma dan limas; menemukan rumus dan menghitung luas permukaan prisma dan limas; serta menemukan rumus dan menghitung volume prisma dan limas.

FAKTORISASI SUKU ALJABAR

Sumber: *Dok. Penerbit*

Pernahkah kalian berbelanja di supermarket? Sebelum berbelanja, kalian pasti memperkirakan barang apa saja yang akan dibeli dan berapa jumlah uang yang harus dibayar. Kalian dapat memperkirakan jumlah uang yang harus dibayar jika kalian mengetahui harga dan banyaknya barang yang akan dibeli. Untuk menghitungnya, kalian tentu memerlukan cara perkalian atau menggunakan cara faktorisasi.

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menyelesaikan operasi tambah, kurang, kali, bagi, dan pangkat pada bentuk aljabar;
- ❖ dapat menentukan faktor suku aljabar;
- ❖ dapat menguraikan bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ penjumlahan bentuk aljabar
- ❖ pengurangan bentuk aljabar
- ❖ perkalian bentuk aljabar
- ❖ pembagian bentuk aljabar
- ❖ perpangkatan bentuk aljabar
- ❖ faktor suku aljabar
- ❖ faktorisasi bentuk aljabar

A. PENGERTIAN KOEFISIEN, VARIABEL, KONSTANTA, DAN SUKU

(Berpikir kritis)
Tentukan variabel pada bentuk aljabar berikut.

1. $2x - 4 = 0$
2. $-x^2 + y + xy - 1 = 4$
3. $(3x - 1)(-x + 2) = 0$
4. $(a - b)(a + b) = 0$

Di kelas VII kalian telah mempelajari mengenai bentuk-bentuk aljabar. Coba kalian ingat kembali materi tersebut, agar kalian dapat memahami bab ini dengan baik. Selain itu, kalian juga harus menguasai materi tentang KPK dari dua bilangan atau lebih dan sifat-sifat operasi hitung pada bilangan bulat. Perhatikan uraian berikut.

Bonar dan Cut Mimi membeli alat-alat tulis di koperasi sekolah. Mereka membeli 5 buku tulis, 2 pensil, dan 3 bolpoin. Jika buku tulis dinyatakan dengan x, pensil dengan y, dan bolpoin dengan z maka Bonar dan Cut Mimi membeli $5x + 2y + 3z$.

Selanjutnya, bentuk-bentuk $5x + 2y + 3z$, $2x^2$, $4xy^2$, $5x^2 - 1$, dan $(x - 1)(x + 3)$ disebut bentuk-bentuk aljabar. Sebelum mempelajari faktorisasi suku aljabar, marilah kita ingat kembali istilah-istilah yang terdapat pada bentuk aljabar.

1. Variabel

Variabel adalah lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas. Variabel disebut juga peubah. Variabel biasanya dilambangkan dengan huruf kecil a, b, c, ... z.

Tulislah setiap kalimat berikut dengan menggunakan variabel sebagai pengganti bilangan yang belum diketahui nilainya.

a. Jumlah dua bilangan ganjil berurutan adalah 20.
b. Suatu bilangan jika dikalikan 5 kemudian dikurangi 3, hasilnya adalah 12.

Penyelesaian:

a. Misalkan bilangan tersebut x dan $x + 2$, berarti $x + x + 2 = 20$.
b. Misalkan bilangan tersebut x, berarti $5x - 3 = 12$.

2. Konstanta

Suku dari suatu bentuk aljabar yang berupa bilangan dan tidak memuat variabel disebut *konstanta*.

Tentukan konstanta pada bentuk aljabar berikut.

a. $2x^2 + 3xy + 7x - y - 8$

b. $3 - 4x^2 - x$

Penyelesaian:

a. Konstanta adalah suku yang tidak memuat variabel, sehingga konstanta dari $2x^2 + 3xy + 7x - y - 8$ adalah -8.

b. Konstanta dari $3 - 4x^2 - x$ adalah 3.

3. Koefisien

Koefisien pada bentuk aljabar adalah faktor konstanta dari suatu suku pada bentuk aljabar.

Tentukan koefisien x pada bentuk aljabar berikut.

a. $5x^2y + 3x$

b. $2x^2 + 6x - 3$

Penyelesaian:

a. Koefisien x dari $5x^2y + 3x$ adalah 3.

b. Koefisien x dari $2x^2 + 6x - 3$ adalah 6.

4. Suku

Suku adalah variabel beserta koefisiennya atau konstanta pada bentuk aljabar yang dipisahkan oleh operasi jumlah atau selisih.

a. *Suku satu* adalah bentuk aljabar yang tidak dihubungkan oleh operasi jumlah atau selisih.

Contoh: $3x$, $4a^2$, $-2ab$, ...

b. *Suku dua* adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh satu operasi jumlah atau selisih.

Contoh: $a^2 + 2$, $x + 2y$, $3x^2 - 5x$, ...

c. *Suku tiga* adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh dua operasi jumlah atau selisih.

Contoh: $3x^2 + 4x - 5$, $2x + 2y - xy$, ...

Bentuk aljabar yang mempunyai lebih dari dua suku disebut *suku banyak* atau polinom.

Nanti, di tingkat yang lebih lanjut kalian akan mempelajari mengenai suku banyak atau polinom.

(Berpikir kritis)

Sebuah segitiga panjang alasnya sama dengan setengah kali tingginya. Tuliskan luas dan keliling segitiga tersebut dalam bentuk aljabar.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan koefisien-koefisien dari setiap variabel pada bentuk aljabar berikut.
   a. $2x^2 - 4y$
   b. $a^2 + 3ab - b^2 + 1$
   c. $4x + 2xy + y^2$
   d. $2x - 3$
   e. $p^3 - p^2q + 4pq^2 - 5q^3 + 5$
2. Tentukan konstanta pada setiap bentuk aljabar berikut.
   a. $3x^2 - 4x - 5$
   b. $xy - 2x + y + 1$
   c. $2x + 4$
   d. $(x + 3)^2$
   e. $2 + x - 5x^2$
3. Manakah dari bentuk-bentuk aljabar berikut yang merupakan suku satu, suku dua, dan suku tiga?
   a. $3x + 2$
   b. $4x\left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x}\right)$ dengan $x \neq 0$
   c. $x^2 - x$
   d. $a^2 - b^2 + (2a^2 - 4b + 1)$
   e. $1 + 2y + x + 5x^2 - 3xy$
4. Termasuk suku berapakah bentuk aljabar berikut ini?
   a. $2 + 3x + ax^2 + 5x^4 + 6x^5$
   b. $pqr - 1$
   c. $(a + b) + (a - b) + (2a - b) + (a + 2b)$
   d. $2a \times 3b + c$ (dengan $c = ab$)
   e. $5p : q$ (dengan $q = \frac{1}{p}$ dan $p \neq 0$)
5. Tulislah setiap kalimat berikut dengan menggunakan variabel x.
   a. Umur Made dan umur Putri berselisih lima tahun dan berjumlah tiga belas tahun.
   b. Suatu bilangan jika dikalikan dua kemudian ditambah tiga, dan dikuadratkan menghasilkan bilangan 225.
   c. Sepuluh kurangnya dari luas suatu persegi adalah 111 cm^2.
   d. Sebuah pecahan jika penyebutnya ditambah tiga dan pembilangnya dikurangi empat sama dengan $-\frac{1}{7}$.
   e. Umur Mira tiga puluh tahun yang lalu adalah $\frac{1}{4}$ umurnya sekarang.

B. OPERASI HITUNG PADA BENTUK ALJABAR

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Perhatikan uraian berikut ini.

Ujang memiliki 15 kelereng merah dan 9 kelereng putih. Jika kelereng merah dinyatakan dengan x dan kelereng putih dinyatakan dengan y maka banyaknya kelereng Ujang adalah $15x + 9y$.

Selanjutnya, jika Ujang diberi kakaknya 7 kelereng merah dan 3 kelereng putih maka banyaknya kelereng Ujang sekarang adalah $22x + 12y$. Hasil ini diperoleh dari $(15x + 9y) + (7x + 3y)$.

Amatilah bentuk aljabar $3x^2 - 2x + 3y + x^2 + 5x + 10$. Suku-suku $3x^2$ dan x^2 disebut **suku-suku sejenis**, demikian juga suku-suku $-2x$ dan $5x$. Adapun suku-suku $-2x$ dan $3y$ merupakan suku-suku tidak sejenis.

Suku-suku sejenis adalah suku yang memiliki variabel dan pangkat dari masing-masing variabel yang sama.

Pemahaman mengenai suku-suku sejenis dan suku-suku tidak sejenis sangat bermanfaat dalam menyelesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan dari bentuk aljabar. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk aljabar dapat diselesaikan dengan memanfaatkan sifat komutatif, asosiatif, dan distributif dengan memerhatikan suku-suku yang sejenis. Coba kalian ingat kembali sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat. Sifat-sifat tersebut berlaku pada penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar.

(Berpikir kritis)

Coba ingat kembali mengenai sifat komutatif, asosiatif, dan distributif pada bilangan bulat. Eksplorasilah penggunaan sifat-sifat tersebut pada bentuk aljabar. Diskusikan hal ini dengan teman sebangkumu.

1. Tentukan hasil penjumlahan $3x^2 - 2x + 5$ dengan $x^2 + 4x - 3$.

Penyelesaian:

$(3x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 4x - 3)$

$= 3x^2 - 2x + 5 + x^2 + 4x - 3$

$= 3x^2 + x^2 - 2x + 4x + 5 - 3$ → *kelompokkan suku-suku sejenis*

$= (3 + 1)x^2 + (-2 + 4)x + (5 - 3)$ → *sifat distributif*

$= 4x^2 + 2x + 2$

2. Tentukan hasil pengurangan $4y^2 - 3y + 2$ dari $2(5y^2 - 3)$.

Penyelesaian:

$2(5y^2 - 3) - (4y^2 - 3y + 2)$

$= 10y^2 - 6 - 4y^2 + 3y - 2$

$= (10 - 4)y^2 + 3y + (-6 - 2)$

$= 6y^2 + 3y - 8$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan koefisien dari x dan y^2 pada bentuk aljabar berikut.
   a. $3x + 5y^2 – 4x + (–2y^2) – 7$
   b. $2y^2 – x + 4 – y^2 + 3x – 5$
   c. $6x – 4y^2 + z – 2x + y^2 – 3z$
   d. $3(x – y^2 + 2) – 5(2x + 3y^2 – 2)$
2. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $(2x + 8) + (4x – 5 – 5y)$
   b. $(3p + q) + (–2p – 5q + 7)$
   c. $(3x^2 + 2x – 1) + (x^2 – 5x + 6)$
   d. $2(x + 2y – xy) + 5(2x – 3y + 5xy)$
3. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $(2x + 5) – (x – 3)$
   b. $(x^2 + 4x – 1) – (2x^2 + 4x)$
   c. $(y^2 – 3) – (4y^2 + 5y + 6)$
   d. $(5a – 6 + ab) – (a + 2ab – 1)$
4. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $a^2 + 2ab – 3b^2 – 7a^2 – 5ab$
   b. $x^2 – x – 6 + 3x^2 – xy$
   c. $3p^3 – 2pq^2 + p^2q – 7p^3 + 2p^2q$
   d. $–2(p^3 – 2pq + q^2) + 3(p^3 + 4pq – q^2)$

2. Perkalian

a. Perkalian suatu bilangan dengan bentuk aljabar

Coba kalian ingat kembali sifat distributif pada bilangan bulat. Jika a, b, dan c bilangan bulat maka berlaku $a(b + c) = ab + ac$. Sifat distributif ini dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan operasi perkalian pada bentuk aljabar.

Perkalian suku dua $(ax + b)$ dengan skalar/bilangan k dinyatakan sebagai berikut.

$$k(ax + b) = kax + kb$$

1. Jabarkan bentuk perkalian berikut.
   a. $2(3x – y)$
   b. $8(–x^2 + 3x)$

Penyelesaian:

a. $2(3x – y) = 2 \times 3x + 2 \times (–y)$
$= 6x – 2y$

b. $8(–x^2 + 3x) = –8x^2 + 24x$

2. Selesaikan bentuk perkalian berikut.
   a. $2(–6x)$

Penyelesaian:

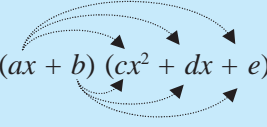
a. $2(–6x) = 2 \times (–6) \times x$
$= –12x$

b. $12a\left(-\frac{1}{3}\right)$

c. $(-4x)(-2y)$

d. $(3a)(-3a)$

b. $12a\left(-\frac{1}{3}\right) = 12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times a$
$= -4a$

c. $(-4x)(-2y) = (-4) \times (-2) \times xy$
$= 8xy$

d. $(3a)(-3a) = 3 \times (-3) \times a^2$
$= -9a^2$

b. Perkalian antara bentuk aljabar dan bentuk aljabar

Telah kalian pelajari bahwa perkalian antara bilangan skalar k dengan suku dua $(ax + b)$ adalah $k\ (ax + b) = kax + kb$. Dengan memanfaatkan sifat distributif pula, perkalian antara bentuk aljabar suku dua $(ax + b)$ dengan suku dua $(ax + d)$ diperoleh sebagai berikut.

$$(ax + b)\ (cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$
$$= ax(cx) + ax(d) + b(cx) + bd$$
$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku adalah $(5x - 3)$ cm, sedangkan panjang sisi siku-sikunya $(3x + 3)$ cm dan $(4x - 8)$ cm. Tentukan keliling dan luas segitiga tersebut dalam bentuk aljabar.

Sifat distributif dapat pula digunakan pada perkalian suku dua dan suku tiga.

$$(ax + b)\ (cx^2 + dx + e) = ax(cx^2) + ax(dx) + ax(e) + b(cx^2) + b(dx) + b(e)$$
$$= acx^3 + adx^2 + aex + bcx^2 + bdx + be$$
$$= acx^3 + (ad + bc)x^2 + (ae + bd)x + be$$

Selanjutnya, kita akan membahas mengenai hasil perkalian $(ax + b)\ (ax + b)$, $(ax + b)(ax - b)$, $(ax - b)(ax - b)$, dan $(ax^2 + bx + c)^2$. Pelajari uraian berikut ini.

a. $(ax+b)^2 = (ax+b)(ax+b)$
$= ax(ax+b) + b(ax+b)$
$= ax(ax) + ax(b) + b(ax) + b^2$
$= a^2x^2 + abx + abx + b^2$
$= a^2x^2 + 2abx + b^2$

b. $(ax+b)(ax-b) = ax(ax-b) + b(ax-b)$
$= ax(ax) + ax(-b) + b(ax) + b(-b)$
$= a^2x^2 - abx + abx - b^2$
$= a^2x^2 - b^2$

(Berpikir kritis)

Dengan memanfaatkan sifat distributif, tentukan hasil perkalian dari bentuk aljabar $(ax^2 + bx + c)^2$. Diskusikan dengan temanmu.

c. $(ax-b)^2 = (ax-b)(ax-b)$

$= ax(ax-b)+(-b)(ax-b)$

$= ax(ax)+ax(-b)+(-b)(ax)+(-b)(-b)$

$= a^2x^2 - abx - abx + b^2$

$= a^2x^2 - 2abx + b^2$

Tentukan hasil perkalian bentuk aljabar berikut.

1. $(x + 2)(x + 3)$
2. $(2x + 3)(x^2 + 2x - 5)$

Penyelesaian:

1. Cara (i) dengan sifat distributif

$(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3)$

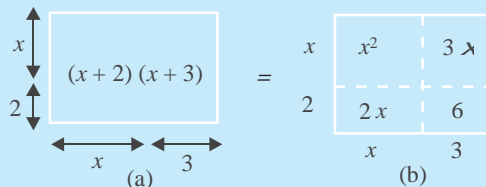
$= x^2 + 3x + 2x + 6$

$= x^2 + 5x + 6$

Cara (ii) dengan skema

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6$

$= x^2 + 5x + 6$

Cara (iii) dengan peragaan mencari luas persegi panjang dengan $p = x + 3$ dan $l = x + 2$ seperti ditunjukkan pada Gambar 1.1.

Gambar 1.1

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6$

$= x^2 + 5x + 6$

2. Cara (i) dengan sifat distributif

$(2x + 3)(x^2 + 2x - 5)$

$= 2x(x^2 + 2x - 5) + 3(x^2 + 2x - 5)$

$= 2x^3 + 4x^2 - 10x + 3x^2 + 6x - 15$

$= 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 10x + 6x - 15$

$= 2x^3 + 7x^2 - 4x - 15$

(Berpikir kritis)

Dengan menggunakan skema, coba jabarkan bentuk aljabar $(ax + by)(ax + by + z)$.

Cara (ii) dengan skema

$(2x + 3)(x^2 + 2x - 5)$

$= 2x^3 + 4x^2 - 10x + 3x^2 + 6x - 15$

$= 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 10x + 6x - 15$

$= 2x^3 + 7x^2 - 4x - 15$

Uji Kompetensi 3

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan hasil perkalian bentuk aljabar berikut.
   a. $2(x + 4)$
   b. $-3(a - 2b)$
   c. $5(3x + 2y)$
   d. $-2a(a + 4b)$
   e. $4a^2(-a + 2b)$
   f. $2xy(x - 4)$
   g. $-p^2(p^2 - 3p)$
   h. $\frac{1}{2}(4x - 6y)$
2. Jabarkan bentuk perkalian berikut dengan menggunakan sifat distributif.
   a. $(2x - 3)(x + 5)$
   b. $(3x - y)(x + y)$
   c. $(5m - 1)(m + 4)$
   d. $(2p + q)(p - 4q)$
   e. $(a - 4)(2a + 3)$
   f. $(a + 3b)(2a - 4b)$
   g. $(-3 - p)(5 + p)$
   h. $(5 + a)(7 - a)$
3. Jabarkan bentuk perkalian berikut dengan menggunakan skema, kemudian sederhanakan.
   a. $(2x + 3)(x - 4)$
   b. $(a + 3b)(a - 5\text{b})$
   c. $(5m - 1)(2m + 4)$
   d. $(a - 3)(a^2 + 4a + 5)$
   e. $(x + y)(3x^2 + xy + 2y^2)$
   f. $(3k - 5)(k^2 + 2k - 6)$
   g. $(a + ab + b)(a - b)$
   h. $(x^2 + 3x - 5)(x^2 - 2x - 1)$
4. Tentukan hasil perkalian berikut.
   a. $ab(a + 2b - c)$
   b. $5xy(x - 3y + 5)$
   c. $2xy(x - 3y)$
   d. $5a(3ab - 2ac)$
   e. $3y(4xy - 4yz)$

3. Perpangkatan Bentuk Aljabar

Coba kalian ingat kembali operasi perpangkatan pada bilangan bulat. Operasi perpangkatan diartikan sebagai operasi *perkalian berulang* dengan unsur yang sama. Untuk sebarang bilangan bulat a, berlaku

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$$

Sekarang kalian akan mempelajari operasi perpangkatan pada bentuk aljabar.

Pada perpangkatan bentuk aljabar suku satu, perlu diperhatikan perbedaan antara $3x^2$, $(3x)^2$, $-(3x)^2$, dan $(-3x)^2$ sebagai berikut.

a. $3x^2 = 3 \times x \times x$
$= 3x^2$

b. $(3x)^2 = (3x) \times (3x)$
$= 9x^2$

c. $-(3x)^2 = -((3x) \times (3x))$
$= -9x^2$

d. $(-3x)^2 = (-3x) \times (-3x)$
$= 9x^2$

Untuk menentukan perpangkatan pada bentuk aljabar suku dua, perhatikan uraian berikut.

$(a + b)^1 = a + b$

→ *koefisien a* dan *b* adalah *1 1*

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
$= a^2 + ab + ab + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

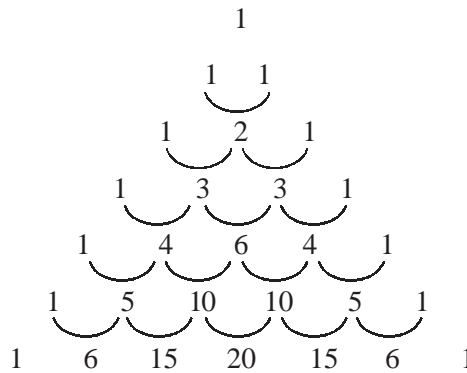
→ *koefisien* a^2, ab, dan b^2 adalah *1 2 1*

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$
$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

→ *koefisien* a^3, a^2b, ab^2 dan b^3 adalah *1 3 3 1*

$(a + b)^4 = (a + b)^2 (a + b)^2$
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

→ *koefisien* a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, dan b^4 adalah *1 4 6 4 1*

Demikian seterusnya untuk $(a + b)^n$ dengan n bilangan asli. Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan koefisien-koefisien $(a + b)^n$ membentuk barisan *segitiga Pascal* seperti berikut.

Tugas Mandiri

(Berpikir kritis)
Berdasarkan konsep segitiga Pascal, coba jabarkan bentuk aljabar $(a + b)^n$ untuk $7 \leq n \leq 10$. Bandingkan hasilnya dengan teman sebangkumu. Apakah jawabanmu sudah tepat?

Pangkat dari a (unsur pertama) pada $(a + b)^n$ dimulai dari a^n kemudian berkurang satu demi satu dan terakhir a^1 pada suku ke-n. Sebaliknya, pangkat dari b (unsur kedua) dimulai dengan b^1 pada suku ke-2 lalu bertambah satu demi satu dan terakhir b^n pada suku ke-$(n + 1)$.

Perhatikan contoh berikut.

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Contoh

Tentukan hasil perpangkatan bentuk aljabar berikut.

a. $(2x + 3)^4$
b. $(x + 4y)^3$

Penyelesaian:

a. $(2x + 3)^4$
$= 1(2x)^4 + 4(2x)^3(3) + 6(2x)^2(3^2) + 4(2x)^1(3^3) + 1(3^4)$
$= 1(16x^4) + 4(8x^3)(3) + 6(4x^2)(9) + 4(2x)(27) + 1(81)$
$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

b. $(x + 4y)^3$
$= 1(x^3) + 3(x^2)(4y)^1 + 3x\,(4y)^2 + 1(4y)^3$
$= 1x^3 + 3x^2(4y) + 3x(16y^2) + 1(64y^3)$
$= x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan hasil perpangkatan bentuk aljabar berikut.
   a. $(5a)^3$
   b. $(2xy)^2$
   c. $(-3x)^3$
   d. $(4p^2q)^2$

e. $(-5xy^3)^4$
f. $-(2abc)^3$
g. $-(3pq)^4$
h. $a(ab^2)^3$

2. Jabarkan perpangkatan bentuk aljabar berikut.
   a. $(x + 4)^3$
   b. $(a - 5)^4$
   c. $(2x + y)^3$
   d. $(3p + q)^4$
   e. $(3m - 2n)^4$
   f. $(4a - 3b)^3$
   g. $(2y^2 + y)^3$
   h. $(3a - 2)^5$
3. Tentukan koefisien $(a + b)^n$ pada suku yang diberikan.
   a. Suku ke-3 pada $(3a + 4)^4$.
   b. Suku ke-2 pada $(x + 3y)^3$.
   c. Suku ke-2 pada $(a - 2b)^4$.
   d. Suku ke-4 pada $(-2x + 5y)^5$.
   e. Suku ke-5 pada $(2m - 3)^5$.
4. Jabarkan bentuk aljabar berikut, kemudian sederhanakan.
   a. $(2x - 1)^2$
   b. $(3 + 5x)^2$
   c. $(2x + y)^2 + (x + 2y + 1)$
   d. $(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2$
   e. $(3x + 2)^2 + (2x + 1)(1 - 2x)$

4. Pembagian

Kalian telah mempelajari penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan perpangkatan pada bentuk aljabar. Sekarang kalian akan mempelajari pembagian pada bentuk aljabar.

Telah kalian pelajari bahwa jika suatu bilangan a dapat diubah menjadi $a = p \times q$ dengan a, p, q bilangan bulat maka p dan q disebut faktor-faktor dari a. Hal tersebut berlaku pula pada bentuk aljabar.

Perhatikan uraian berikut.

$$2x^2yz^2 = 2 \times x^2 \times y \times z^2$$
$$x^3y^2z = x^3 \times y^2 \times z$$

Pada bentuk aljabar di atas, 2, x^2, y, dan z^2 adalah faktor-faktor dari $2x^2yz^2$, sedangkan x^3, y^2, dan z adalah faktor-faktor dari bentuk aljabar x^3y^2z.

Faktor sekutu (faktor yang sama) dari $2x^2yz^2$ dan x^3y^2z adalah x^2, y, dan z, sehingga diperoleh

$$\frac{2x^2yz^2}{x^3y^2z} = \frac{\cancel{x^2yz}(2z)}{\cancel{x^2yz}(xy)}$$
$$= \frac{2z}{xy}$$

Berdasarkan uraian di atas dapat kita simpulkan bahwa jika dua bentuk aljabar memiliki faktor sekutu yang sama maka hasil bagi kedua bentuk aljabar tersebut dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana. Dengan demikian, pada operasi pembagian bentuk aljabar kalian harus menentukan terlebih dahulu faktor sekutu kedua bentuk aljabar tersebut, kemudian baru dilakukan pembagian.

Sederhanakan bentuk aljabar berikut.

1. $5xy : 2x$
2. $6x^3 : 3x^2$
3. $8a^2b^3 : 2ab$
4. $(p^2q \times pq) : p^2q^2$

Penyelesaian:

1. $5xy : 2x = \frac{5xy}{2x} = \frac{5y \times x}{2 \times x} = \frac{5}{2}y \rightarrow \textit{faktor sekutu } x$

2. $6x^3 : 3x^2 = \frac{6x^3}{3x^2} = \frac{3x^2 \times 2x}{3x^2} = 2x \rightarrow \textit{faktor sekutu } 3x^2$

3. $8a^2b^3 : 2ab = \frac{8a^2b^3}{2ab} = \frac{2ab \times 4ab^2}{2ab}$
$= 4ab^2 \rightarrow \textit{faktor sekutu } 2ab$

4. $\left(p^2q \times pq\right) : p^2q^2 = \frac{p^2q \times pq}{p^2q^2} = \frac{p^3q^2}{p^2q^2}$
$= \frac{p^2q^2 \times p}{p^2q^2} = p$

Uji Kompetensi 5

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.
Sederhanakan bentuk aljabar berikut.

1. $6xy : 2y$
2. $10a^2b^4c^3 : 2abc$
3. $p^4q^6r^5 : pq^2r^3$
4. $6x^3y^7 : 2xy : 3y$
5. $18a^3b^5c^6 : 2ab^2 : 3a^2c^2$
6. $20a^4b^5c^7 : (4a^2b^2c^3 : 2abc)$
7. $21p^4q^5r^3 : (8p^2qr^3 : 2pqr)$
8. $3x^2y \times 2yz^2 : xyz$
9. $30x^6y^9 : (5x^4y^2 \times 2xy^3)$
10. $32x^4yz^6 : 2xyz \times 4xy^2z^3$

C. PEMFAKTORAN BENTUK ALJABAR

Di kelas VII kalian telah mempelajari materi mengenai KPK dan FPB. Pada materi tersebut kalian telah mempelajari cara menentukan kelipatan dan faktor dari suatu bilangan. Coba ingat kembali cara menentukan faktor dari suatu bilangan. Perhatikan uraian berikut.

$48 = 1 \times 48$
$= 2^4 \times 3$

Bilangan 1, 2^4, 3, dan 48 adalah faktor-faktor dari 48.

Bilangan 2 dan 3 adalah faktor prima dari 48.

Jadi, bentuk perkalian $2^4 \times 3$ merupakan faktorisasi prima dari 48.

Ingat kembali bahwa faktorisasi prima dari suatu bilangan adalah perkalian faktor-faktor prima dari bilangan tersebut.

Di bagian depan telah kalian pelajari bahwa sifat distributif $a(x + y)$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\underbrace{ax + ay}_{\text{bentuk penjumlahan}} = \underbrace{a(x + y)}_{\text{bentuk perkalian}}$$

dengan a, x, dan y adalah bilangan real.

Dari bentuk di atas, tampak bahwa bentuk penjumlahan dapat dinyatakan sebagai bentuk perkalian jika suku-suku dalam bentuk penjumlahan tersebut memiliki faktor yang sama. Dari bentuk $ax + ay = a(x + y)$, a dan $(x + y)$ merupakan faktor-faktor dari $ax + ay$.

Proses menyatakan bentuk penjumlahan menjadi suatu bentuk perkalian faktor-faktornya disebut *pemfaktoran* atau *faktorisasi*.

Pemfaktoran atau faktorisasi bentuk aljabar adalah menyatakan bentuk penjumlahan menjadi suatu bentuk perkalian dari bentuk aljabar tersebut.

Sekarang, kalian akan mempelajari faktorisasi dari beberapa bentuk aljabar. Perhatikan uraian berikut.

1. Bentuk $ax + ay + az + ...$ dan $ax + bx - cx$

Bentuk aljabar yang terdiri atas dua suku atau lebih dan memiliki faktor sekutu dapat difaktorkan dengan menggunakan sifat distributif.

$$ax + ay + az + ... = a(x + y + z + ...)$$
$$ax + bx - cx = x(a + b - c)$$

Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.

a. $2x + 2y$

b. $x^2 + 3x$

c. $a^2 + ab$

d. $pq^2r^3 + 2p^2qr + 3pqr$

Penyelesaian:

a. $2x + 2y$ memiliki faktor sekutu 2, sehingga $2x + 2y = 2(x + y)$.

b. $x^2 + 3x$ memiliki faktor sekutu x, sehingga $x^2 + 3x = x(x + 3)$.

c. $a^2 + ab$ memiliki faktor sekutu a, sehingga $a^2 + ab = a(a + b)$.

d. $pq^2r^3 + 2p^2qr + 3pqr$ memiliki faktor sekutu pqr, sehingga
$pq^2r^3 + 2p^2qr + 3pqr = pqr(qr^2 + 2p + 3)$.

2. Bentuk Selisih Dua Kuadrat $x^2 - y^2$

Bentuk aljabar yang terdiri atas dua suku dan merupakan selisih dua kuadrat dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x^2 + (xy - xy) - y^2 \\ &= (x^2 + xy) - (xy + y^2) \\ &= x(x + y) - y(x + y) \\ &= (x - y)(x + y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk selisih dua kuadrat $x^2 - y^2$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut.

a. $x^2 - 4$
b. $a^2 - 9b^2$
c. $4p^2 - 36$
d. $9x^2 - 25y^2$

Penyelesaian:

a. $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$= (x - 2)(x + 2)$

b. $a^2 - 9b^2 = a^2 - (3b)^2$
$= (a - 3b)(a + 3b)$

c. $4p^2 - 36 = (2p)^2 - 6^2$
$= (2p - 6)(2p + 6)$

d. $9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2$
$= (3x - 5y)(3x + 5y)$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.
Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.

1. $3x - 3y$
2. $2x + 6$
3. $x^3 + xy^2$
4. $ap^2 + 2ap$
5. $4x^2y - 6xy^3$
6. $3p^2 - 12$
7. $ab + bc$
8. $8pq + 24pqr$
9. $x^4 - 3x^2 + x$
10. $15x^2 - 18xy + 9xz$
11. $x^2 - 25$
12. $9m^2 - 16$
13. $1 - x^2$
14. $49 - p^2$
15. $9x^2 - 16$
16. $64a^2 - 9$
17. $8a^2 - 2b^2$
18. $25p^2 - 16q^2$
19. $36x^2 - 81y^2$
20. $81p^2 - 100q^2$

3. Bentuk $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$ perhatikan uraian berikut.

a. $$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &= (x^2 + xy) + (xy + y^2) \\ &= x(x + y) + y(x + y) \\ &= (x + y)(x + y) \\ &= (x + y)^2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= x^2 - xy - xy + y^2 \\ &= (x^2 - xy) - (xy - y^2) \\ &= x(x - y) - y(x - y) \\ &= (x - y)(x - y) \\ &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y) = (x - y)^2$

Faktorkanlah bentuk-bentuk berikut.

a. $p^2 + 2pq + q^2$

b. $x^2 - 4x + 4$

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned} p^2 + 2pq + q^2 &= p^2 + pq + pq + q^2 \\ &= (p^2 + pq) + (pq + q^2) \\ &= p(p + q) + q(p + q) \\ &= (p + q)(p + q) \\ &= (p + q)^2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 2x - 2x + 4 \\ &= (x^2 - 2x) - (2x - 4) \\ &= x(x - 2) - 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(x - 2) \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

4. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a = 1$

Pada pembahasan di depan telah kalian pelajari mengenai perkalian antara suku dua dan suku dua sebagai berikut.

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6$
$= x^2 + 5x + 6$ .... (dihasilkan suku tiga)

Sebaliknya, bentuk suku tiga $x^2 + 5x + 6$ apabila difaktorkan menjadi

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$5 = 2 + 3$ $6 = 2 \times 3$ $2 \times 3 = 6$, $2 + 3 = 5$

Perhatikan bahwa bentuk aljabar $x^2 + 5x + 6$ memenuhi bentuk $x^2 + bx + c$.

Berdasarkan pengerjaan di atas, ternyata untuk memfaktorkan bentuk $x^2 + bx + c$ dilakukan dengan cara mencari dua bilangan real yang hasil kalinya sama dengan c dan jumlahnya sama dengan b.

Misalkan $x^2 + bx + c$ sama dengan $(x + m)(x + n)$.

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$
$= x^2 + mx + nx + mn$
$= x^2 + (m + n)x + mn$

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + mn$$

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ dengan $m \times n = c$ dan
$m + n = b$

1. Faktorkanlah bentuk aljabar berikut.
   a. $x^2 + 4x + 3$
   b. $x^2 - 13x + 12$

Penyelesaian:

Langkah-langkah memfaktorkan bentuk aljabar $x^2 + bx + c$ dengan c positif sebagai berikut.

– Pecah c menjadi perkalian faktor-faktornya.
– Tentukan pasangan bilangan yang berjumlah b.

a. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

3		Jumlah
1	3	4

b. $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$

12		Jumlah
1	12	13
2	6	8
3	4	7

2. Faktorkanlah bentuk aljabar berikut.

a. $x^2 + 4x - 12$

b. $x^2 - 15x - 16$

Penyelesaian:

Langkah-langkah memfaktorkan bentuk aljabar $x^2 + bx + c$ untuk c negatif sebagai berikut.

– Pecah c menjadi perkalian faktor-faktornya.

– Tentukan pasangan bilangan yang selisihnya b.

– Bilangan yang bernilai lebih besar bertanda sama dengan b, sedangkan bilangan yang bernilai lebih kecil bertanda sebaliknya.

a. $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$

12		Selisih
1	12	11
2	6	4
3	4	1

b. $x^2 - 15x - 16 = (x + 1)(x - 16)$

16		Selisih
1	16	15
2	8	6
4	4	0

Uji Kompetensi 7

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.
Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.

1. $x^2 - 6x + 8$
2. $x^2 + 9x + 20$
3. $x^2 + 7x + 12$
4. $p^2 - 5p + 4$
5. $a^2 + 8a + 12$
6. $m^2 + 8m + 16$
7. $p^2 - 8p + 12$
8. $b^2 + 6b + 9$
9. $p^2 - 4p + 4$
10. $x^2 - 8x + 16$
11. $x^2 - 6x + 9$
12. $x^2 - 2xy + y^2$
13. $a^2 - 2a - 15$
14. $m^2 + 2m + 1$
15. $a^2 + 5a - 24$
16. $t^2 - 3t - 18$
17. $b^2 - 2b - 8$
18. $p^2 + 8p - 33$
19. $n^2 + 2n - 8$
20. $y^2 + 3y - 40$

5. Bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1, a \neq 0$

Kalian telah mempelajari perkalian antara suku dua dengan suku dua menjadi bentuk penjumlahan seperti berikut.

$12 \times 6 = 72$

$9 \times 8 = 72$

$9 + 8 = 17$

$$(3x + 2)(4x + 3) = 12x^2 + 9x + 8x + 6$$
$$= 12x^2 + 17x + 6$$

Perhatikan bahwa $(9 + 8) = 17$ dan $9 \times 8 = 12 \times 6$.

Berdasarkan uraian di atas dapat dikatakan bahwa bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan a $\neq$ 1, $a \neq 0$ dapat difaktorkan dengan cara berikut.

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + px + qx + c$$

dengan $p \times q = a \times c$

$$p + q = b$$

Selain dengan menggunakan sifat distributif, terdapat rumus yang dapat digunakan untuk memfaktorkan bentuk aljabar $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$. Perhatikan uraian berikut.

Misalkan $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n)$.

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax+m)(ax+n)}{a}$$

$$\Leftrightarrow a(ax^2 + bx + c) = a^2x^2 + amx + anx + mn$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + abx + ac = a^2x^2 + a(m + n)x + mn$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa $m \times n = a \times c$ dan $m + n = b$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa ada dua cara untuk memfaktorkan bentuk aljabar $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$ sebagai berikut.

a. *Menggunakan sifat distributif*

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + px + qx + c \text{ dengan}$$
$$p \times q = a \times c \text{ dan}$$
$$p + q = b$$

b. *Menggunakan rumus*

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n) \text{ dengan}$$
$$m \times n = a \times c \text{ dan}$$
$$m + n = b$$

Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.

a. $3x^2 + 14x + 15$

b. $8x^2 + 2x - 3$

Penyelesaian:

a. Memfaktorkan $3x^2 + 14x + 15$.

Langkah-langkah pemfaktoran $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ untuk c positif sebagai berikut.

- Jabarkan $a \times c$ menjadi perkalian faktor-faktornya.
- Tentukan pasangan bilangan yang berjumlah b.

$3x^2 + 14x + 15$; $a = 3$; $b = 14$; $c = 15$

Cara 1

Dengan menggunakan sifat distributif

$ac = 45$		Jumlah
1	45	46
3	15	18
5	9	14

Dua bilangan yang hasil kalinya $ac = 3 \times 15 = 45$ dan jumlahnya 14 adalah 5 dan 9, sehingga

$$\begin{aligned} 3x^2 + 14x + 15 &= 3x^2 + 5x + 9x + 15 \\ &= x(3x + 5) + 3(3x + 5) \\ &= (x + 3)(3x + 5) \end{aligned}$$

Cara 2

Dengan menggunakan rumus

$$\begin{aligned} 3x^2 + 14x + 15 &= \frac{1}{3}(3x + 5)(3x + 9) \\ &= \frac{1}{3}(3x+9)(3x+5) \\ &= \frac{1}{3}\times 3(x+3)(3x+5) \\ &= (x + 3)(3x + 5) \end{aligned}$$

Jadi, $3x^2 + 14x + 15 = (x + 3)(x + 5)$.

b. Memfaktorkan $8x^2 + 2x - 3$.

Langkah-langkah pemfaktoran $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ dengan c negatif sebagai berikut.

- Jabarkan $a \times c$ menjadi perkalian faktor-faktornya.
- Tentukan pasangan bilangan yang selisihnya b.
- Bilangan yang bernilai lebih besar sama tandanya dengan b, sedangkan bilangan yang bernilai lebih kecil bertanda sebaliknya.

Cara 1

Dengan menggunakan sifat distributif

$ac = 24$		Selisih
1	24	23
2	12	10
3	8	5
4	6	(2)

Dua bilangan yang hasil kalinya $ac = 8 \times 3 = 24$ dan selisihnya 2 adalah 4 dan 6, sehingga

$8x^2 + 2x - 3$
$= 8x^2 - 4x + 6x - 3$
$= 4x(2x - 1) + 3(2x - 1)$
$= (4x + 3)(2x - 1)$

Cara 2

Dengan menggunakan rumus

$$8x^2 + 2x - 3 = \frac{1}{8}(8x - 4)(8x + 6)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(8x - 4)(8x + 6)$$

$$= \frac{1}{4}(8x - 4) \times \frac{1}{2}(8x + 6)$$

$$= \frac{1}{4} \times 4(2x - 1) \times \frac{1}{2} \times 2(4x + 3)$$

$$= (2x - 1)(4x + 3)$$

Jadi, $8x^2 + 2x - 3 = (2x - 1)(4x + 3)$.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu. Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.

1. $2x^2 + 7x + 3$
2. $3x^2 + 18x + 5$
3. $2x^2 + 5x + 3$
4. $3y^2 + 8y + 4$
5. $5x^2 + 13x + 6$
6. $3y^2 - 8y + 4$
7. $8p^2 - 14p + 5$
8. $12m^2 - 8m + 1$
9. $10a^2 - 43a + 12$
10. $12x^2 - 34x + 10$
11. $3p^2 + 7p - 6$
12. $8a^2 + 10a - 3$
13. $6y^2 - 5y - 6$
14. $5x^2 + 23x - 10$
15. $2y^2 + 5y - 3$
16. $4x^2 - 7xy - 2y^2$
17. $6x^2 + 5xy - 6y^2$
18. $8a^2 + 2ab - 15b^2$
19. $1 + 3m - 18m^2$
20. $15 - 7x - 2x^2$

D. OPERASI PADA PECAHAN BENTUK ALJABAR

1. Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan Aljabar

Di kelas VII kalian telah mempelajari operasi penjumlahan dan pengurangan pada pecahan aljabar dengan penyebut suku satu. Sama seperti pada pecahan aljabar dengan penyebut suku satu, pada pecahan aljabar dengan penyebut suku dua dan sama dapat langsung *dijumlah* atau *dikurangkan* pembilangnya.

Soal Tantangan

Sederhanakan bentuk aljabar

$$\frac{21x^2 + 38x + 5}{12x^2 + 29x + 15}.$$

Adapun pada penjumlahan dan pengurangan pecahan aljabar dengan penyebut berbeda dapat dilakukan dengan cara *menyamakan penyebutnya* terlebih dahulu menjadi kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari penyebut-penyebutnya.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{atau} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Contoh

Selesaikan operasi penjumlahan atau pengurangan berikut.

1. $\dfrac{4}{x^2 - 9} + \dfrac{3}{x + 3}$

2. $\dfrac{4}{x + 3} - \dfrac{5}{x - 1}$

Penyelesaian:

1. $$\frac{4}{x^2 - 9} + \frac{3}{x+3} = \frac{4}{(x+3)(x-3)} + \frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$
$$= \frac{4 + 3x - 9}{x^2 - 9}$$
$$= \frac{3x - 5}{x^2 - 9}$$

2. $$\frac{4}{x+3} - \frac{5}{x-1} = \frac{4(x-1) - 5(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$
$$= \frac{4x - 4 - 5x - 15}{x^2 + 2x - 3}$$
$$= \frac{-x - 19}{x^2 + 2x - 3}$$

2. Perkalian dan Pembagian Pecahan Aljabar

Perkalian antara dua pecahan dapat dilakukan dengan mengalikan antara *pembilang* dengan *pembilang* dan *penyebut* dengan *penyebut*.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan hasil perkalian antara dua pecahan aljabar. Perhatikan contoh berikut.

Selesaikan operasi perkalian berikut.

1. $\frac{a}{a+5} \times \frac{a^2-25}{a-2}$

2. $\frac{x^2+x}{5} \times \frac{3x}{x+1}$

Penyelesaian:

1. $$\frac{a}{a+5} \times \frac{a^2-25}{a-2} = \frac{a(a-5)(a+5)}{(a+5)(a-2)} = \frac{a(a-5)}{a-2} = \frac{a^2-5a}{a-2}$$

2. $$\frac{x^2+x}{5} \times \frac{3x}{x+1} = \frac{x(x+1)\times 3x}{5(x+1)} = \frac{3x^2}{5}$$

Pembagian antara dua pecahan aljabar dilakukan dengan *mengubah* bentuk *pembagian* menjadi bentuk *perkalian* dengan cara mengalikan dengan kebalikan pecahan pembagi.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

Misalkan $x = \frac{1}{y}$.

Tentukan hasil dari

$\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$.

Selesaikan pembagian pecahan aljabar berikut.

1. $\frac{m}{3} : \frac{m^2+4m}{4}$

2. $\frac{a^2-b^2}{a} : \frac{a+b}{a^2}$

Penyelesaian:

1. $$\frac{m}{3} : \frac{m^2+4m}{4} = \frac{m}{3} \times \frac{4}{m^2+4m} = \frac{4m}{3m(m+4)} = \frac{4}{3(m+4)}$$

2. $$\frac{a^2-b^2}{a} : \frac{a+b}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a} \times \frac{a^2}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)a^2}{a(a+b)} = (a-b)a = a^2 - ab$$

Uji Kompetensi 9

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sederhanakanlah.

   a. $\frac{1}{a}+\frac{3}{ab}$

   b. $\frac{3}{x-4}-\frac{x}{x^2-3x-4}$

   c. $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-4}$

   d. $\frac{12}{x^2-81}-\frac{4}{x-9}$

   e. $\frac{1}{x-5}-\frac{2}{x+3}$

   f. $\frac{3}{y^2-25}-\frac{1}{y+5}$

   g. $\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2}{2x^2+9x-5}$

   h. $\frac{x}{x-6}-\frac{2y}{x+6}+\frac{3xy}{36-x^2}$

2. Sederhanakanlah.

   a. $\frac{4x}{6x-3y}\times\frac{x}{2x-y}$

   b. $\frac{2}{m+1}\times\frac{1}{m-1}$

   c. $\frac{6x-12y}{18x^2y}\times\frac{36xy^3}{12x-18y}$

   d. $\left(y-\frac{3y}{y+2}\right)\times\left(\frac{2}{y}+y+3\right)$

   e. $\frac{2x^2+5x-6}{4x^2-2}\times\frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$

3. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut.

   a. $\frac{x^2+4x+3}{x}:\frac{x+4}{4}$

   b. $\frac{a}{a^2-13a+12}:\frac{5ab}{a^2-1}$

   c. $\left(x+\frac{4}{x-2}-9\right):\left(3+\frac{16}{x+2}-5\right)$

   d. $\left(\frac{2x}{x+y}-1\right):\left(x+\frac{2xy}{x+y}-y\right)$

   e. $\frac{3x^2-17x+20}{x^2-2x-8}:\frac{3x^2-12x+9}{2x^2-3x-9}$

3. Menyederhanakan Pecahan Aljabar

Pecahan dikatakan sederhana jika pembilang dan penyebut pecahan tersebut tidak lagi memiliki faktor persekutuan, kecuali 1. Dengan kata lain, jika pembilang dan penyebut suatu pecahan memiliki faktor yang sama kecuali 1 maka pecahan tersebut dapat disederhanakan. Hal ini juga berlaku pada pecahan bentuk aljabar.

Menyederhanakan pecahan aljabar dapat dilakukan dengan memfaktorkan pembilang dan penyebutnya terlebih dahulu, kemudi-an dibagi dengan faktor sekutu dari pembilang dan penyebut tersebut.

Sederhanakan pecahan-pecahan aljabar berikut.

1. $\dfrac{3a^2b - 2ab^2}{4ab}$

2. $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + 11x + 5}$

Penyelesaian:

1. $\dfrac{3a^2b - 2ab^2}{4ab} = \dfrac{ab(3a - 2b)}{4ab}$

$= \dfrac{3a - 2b}{4}$

2. $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + 11x + 5} = \dfrac{(x - 2)(x + 5)}{(2x + 1)(x + 5)}$

$= \dfrac{x - 2}{2x + 1}$

4. Menyederhanakan Pecahan Bersusun (Kompleks)

Pecahan bersusun (kompleks) adalah suatu pecahan yang pembilang atau penyebutnya atau kedua-duanya masih memuat pecahan. Untuk menyederhanakan pecahan bersusun, dilakukan dengan cara mengalikan pembilang dan penyebutnya dengan KPK dari penyebut pecahan pada pembilang dan penyebut pecahan pada penyebut pecahan bersusun.

Sederhanakan pecahan-pecahan berikut.

1. $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a - \frac{1}{b}}$

2. $\dfrac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{x^2 - y^2}$

Penyelesaian:

1. $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{a - \frac{1}{b}} = \dfrac{\frac{b + a}{ab}}{\frac{ab - 1}{b}}$

$= \dfrac{a + b}{ab} \times \dfrac{b}{ab - 1}$

$= \dfrac{a + b}{a(ab - 1)}$

2. $\dfrac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{x^2 - y^2} = \dfrac{\frac{x^2 - y^2}{xy}}{x^2 - y^2}$

$= \dfrac{x^2 - y^2}{xy} \times \dfrac{1}{x^2 - y^2}$

$= \dfrac{1}{xy}$

Uji Kompetensi 10

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sederhanakan pecahan-pecahan berikut.

   a. $\dfrac{64x^2 - 49}{(8x-7)^2}$

   b. $\dfrac{b^2 - a^2x^2}{(ax-b)^2}$

   c. $\dfrac{12pqr^2 - 6p^2qr}{6pqr}$

   d. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 8}$

   e. $\dfrac{x^2 - 1}{(1+xy)^2 - (x+y)^2}$

2. Sederhanakan pecahan bersusun berikut.

   a. $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

   b. $\dfrac{a - \frac{2}{b}}{a + \frac{4}{b}}$

   c. $\dfrac{\frac{x+2}{x^2-4}}{\frac{3}{x-2}}$

   d. $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{2x-1}{2x+1}}}$

   e. $\dfrac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}}$

Rangkuman

1. Suku-suku sejenis adalah suku yang memiliki variabel dan pangkat dari masing-masing variabel yang sama.
2. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk aljabar dapat diselesaikan dengan memanfaatkan sifat komutatif, asosiatif, dan distributif dengan memerhatikan suku-suku yang sejenis.
3. Pemfaktoran atau faktorisasi bentuk aljabar adalah menyatakan bentuk penjumlahan menjadi suatu bentuk perkalian dari bentuk aljabar tersebut.
4. Untuk menyederhanakan pecahan aljabar dapat dilakukan dengan memfaktorkan pembilang dan penyebutnya terlebih dahulu, kemudian dibagi dengan faktor sekutu dari pembilang dan penyebut tersebut.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, bagaimana pemahaman kalian mengenai *Faktorisasi Suku Aljabar*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi tersebut dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada gurumu. Catat pula manfaat apa saja yang dapat kalian peroleh dari materi ini. Buatlah dalam sebuah laporan dan serahkan kepada gurumu.

Evaluasi 1

Kerjakan di buku tugasmu.

A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1. Pada bentuk aljabar $2x^2 + 3xy - y^2$ terdapat ... variabel.
   a. 1 c. 3
   b. 2 d. 4

2. Suku dua terdapat pada bentuk aljabar ....
   a. $2x^2 + 4x - 2$
   b. $3x^2 - y^2 + xy - 5$
   c. $4x^2 - y^2$
   d. $2x^2$

3. Hasil pengurangan $a^2 - 2a$ dari $2 - 3a^2$ adalah ....
   a. $-4a + 2a + 2$ c. $2a^2 + 2a - 2$
   b. $4a^2 - 2a - 2$ d. $a^2 - 2a + 2$

4. Hasil dari $(x - y)(2x + 3y)$ adalah ....
   a. $2x^2 - 5xy - 3y^2$ c. $x^2 - 5xy - y^2$
   b. $2x^2 + xy - 3y^2$ d. $x^2 + xy - y^2$

5. Bentuk sederhana dari $2(x - 3y + xy) - 2xy + 3x$ adalah ....
   a. $4x - xy - 3y$ c. $4x - 6y + xy$
   b. $5x - xy - 4y$ d. $5x - 6y$

6. Diketahui Δ ABC siku-siku di C, dengan AC = $(x - 7)$ cm, BC = $(x - 14)$ cm, dan AB = x cm. Panjang sisi AC adalah ....
   a. 21 cm c. 28 cm
   b. 25 cm d. 35 cm

7. $\dfrac{x+5}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+5} = ...$
   a. $\dfrac{2x^2 - 3x + 9}{(x-2)(x+5)}$ c. $\dfrac{2x^2 + 6x + 29}{(x-2)(x+5)}$
   b. $\dfrac{2x^2 - 6x - 29}{(x-2)(x+5)}$ d. $\dfrac{2x^2 - 6x + 29}{(x-2)(x+5)}$

8. Jika
   $$\frac{3}{x+5} - \frac{x-4}{x^2 + x - 20} = \frac{ax - 4a}{(x+b)(x-c)}$$
   maka perbandingan $(b - c) : a = ...$
   a. 1 : 3 c. 1 : 4
   b. 1 : 2 d. 1 : 6

9. Bentuk sederhana dari $\dfrac{4 - 9a^2}{2 + 3a} = ...$
   a. $4 - 6a$ c. $2 + 3a$
   b. $4 + 6a$ d. $2 - 3a$

10. Bentuk sederhana dari $\dfrac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$ = ...

a. $\dfrac{2x-1}{2x+1}$ c. $\dfrac{x-2}{x+2}$

b. $\dfrac{2x+1}{2x-1}$ d. $\dfrac{x+2}{x-2}$

11. Bentuk sederhana dari

$\dfrac{x-3}{x-2} \times \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$ = ...

a. $\dfrac{x-1}{x-4}$ c. $\dfrac{x+4}{x+1}$

b. $\dfrac{x+4}{x-1}$ d. $\dfrac{x+1}{x+4}$

12. Bentuk aljabar $25a^2 - 16b^2$ jika difaktorkan hasilnya ....
a. $(5a - b)(5a - b)$
b. $(a + 4b)(a - 4b)$
c. $(5a - 4b)(5a - 4b)$
d. $(5a - 4b)(5a + 4b)$

13. Pemfaktoran $x^2 - 19x - 20$ adalah ....
a. $(x - 4)(x + 5)$ c. $(x + 1)(x - 20)$
b. $(x - 2)(x - 10)$ d. $(x + 2)(x - 10)$

14. Pemfaktoran dari $4x^2 + 14x - 18$ adalah ....
a. $(4x - 3)(x + 6)$
b. $(2x - 3)(2x + 6)$
c. $(4x - 2)(x + 9)$
d. $(2x - 2)(2x + 9)$

15. Luas sebuah persegi panjang adalah $(2x^2 + 3x - 9)$ cm^2 dan panjang sisinya $(4x + 6)$ cm. Lebar persegi panjang itu adalah ....

a. $2(x + 3)$ c. $\dfrac{1}{4}(2x - 3)$

b. $\dfrac{3}{4}(x + 3)$ d. $\dfrac{1}{2}(2x - 3)$

B. Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sederhanakanlah.
a. $(3x^2 - xy^2) + (5x^2 + 2xy^2 - 1)$
b. $(2x^2y - xy^2 + 3) - (x^2y + 2xy^2 - 7)$
c. $(2p - 3) - (3p + 7) - (5p - 9) + (p - 12)$
d. $-2(m + 3) - 4(2m - 2(m + 5) - 8)$
e. $3(6a - (a + b)) + 3(-2(2a + 3b) + 4(a - b))$

2. Jabarkan dan sederhanakanlah.
a. $(3x - 2)(4x + 5)$
b. $(x + 8y)(2x - 3y)$
c. $(9p - 5q)^2$
d. $(8a - 3b)(8a + 3b)$
e. $(x + 5)(x^2 + 6x - 4)$

3. Faktorkanlah.
a. $x^2 + 6x - 16$
b. $8x^2 - 2xy - 15y^2$
c. $p^2 - 16q^4$
d. $9a^2 - 8a - 1$
e. $49x^2 - 28x + 4$

4. Sederhanakanlah.

a. $\dfrac{2x^2 + y^2 - (x^2 + 2y^2)}{x + y}$

b. $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 - 12x + 28}$

c. $\dfrac{x^2 - 1}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2}$

d. $\dfrac{1}{a^2 + 2a + 1} + \dfrac{1}{a^2 - 1}$

e. $\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$

5. Diketahui suatu segitiga dengan alas $(x + 2)$ cm dan luasnya $(x^2 - 4)$ cm^2.
a. Tentukan tinggi segitiga dalam variabel x.
b. Jika $x = 3$, tentukan ukuran segitiga tersebut.

FUNGSI

Sumber: *Dok. Penerbit*

Perhatikan sekelompok siswa yang sedang menerima pelajaran di suatu kelas. Setiap siswa menempati kursinya masing-masing. Tidak mungkin seorang siswa menempati lebih dari satu kursi. Demikian pula tidak mungkin satu kursi ditempati oleh lebih dari satu siswa.

Dengan demikian, ada keterkaitan antara siswa dengan kursi yang ditempati. Menurutmu, apakah hal ini termasuk fungsi?

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menjelaskan dengan kata-kata dan menyatakan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan relasi dan fungsi;
- ❖ dapat menyatakan suatu fungsi dengan notasi;
- ❖ dapat menghitung nilai fungsi;
- ❖ dapat menentukan bentuk fungsi jika nilai dan data fungsi diketahui;
- ❖ dapat menyusun tabel pasangan nilai peubah dengan nilai fungsi;
- ❖ dapat menggambar grafik fungsi pada koordinat Cartesius.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ relasi
- ❖ fungsi
- ❖ grafik fungsi

A. RELASI

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kalian harus menguasai materi himpunan, anggota himpunan, dan himpunan bagian dari suatu himpunan.

Gambar 2.1

(Menumbuhkan kreativitas)

Bentuklah kelompok terdiri atas 4 orang, 2 pria dan 2 wanita. Kemudian buatlah relasi yang menghubungkan antara anggota kelompokmu dengan makanan yang disukai.

1. Pengertian Relasi

Agar kalian memahami pengertian relasi, perhatikan Gambar 2.1. di samping.

Gambar 2.1 menunjukkan suatu kumpulan anak yang terdiri atas Tino, Ayu, Togar, dan Nia berada di sebuah toko alat tulis. Mereka berencana membeli buku dan alat tulis.

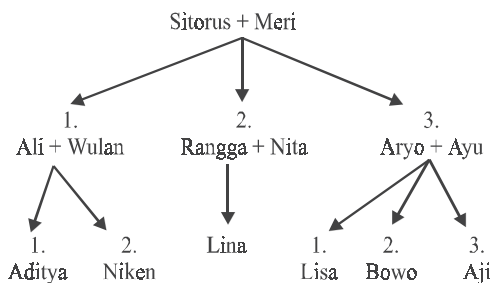
Tino berencana membeli buku tulis dan pensil, Ayu membeli penggaris dan penghapus, Togar membeli bolpoin, buku tulis, dan tempat pensil, sedangkan Nia membeli pensil dan penggaris.

Perhatikan bahwa ada hubungan antara himpunan anak = {Tino, Ayu, Togar, Nia} dengan himpunan alat tulis = {buku tulis, pensil, penggaris, penghapus, bolpoin, tempat pensil}. Himpunan anak dengan himpunan alat tulis dihubungkan oleh kata *membeli*. Dalam hal ini, kata *membeli* merupakan *relasi* yang menghubungkan himpunan anak dengan himpunan alat tulis.

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Bagan berikut menunjukkan silsilah keluarga Bapak Sitorus dan Ibu Meri. Tanda panah menunjukkan hubungan "mempunyai anak".

a. Sebutkan relasi-relasi yang mungkin antara nama-nama pada silsilah tersebut.

b. Siapakah ayah dari Lisa, Bowo, dan Aji?

c. Tunjukkan relasi yang memenuhi antara Aditya, Lina, dan Bowo.

d. Sebutkan cucu laki-laki Bapak Sitorus dan Ibu Meri.

2. Diketahui A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {2, 4, 6, 8, 12}.
   a. Jika dari A ke B dihubungkan relasi "setengah dari", tentukan himpunan anggota A yang mempunyai kawan di B.
   b. Jika dari B ke A dihubungkan relasi "kuadrat dari", tentukan himpunan anggota B yang mempunyai kawan di A.
3. Diketahui A = {5, 6, 7, 8} dan B = {25, 30, 35, 36, 49, 64}.
   a. Buatlah dua relasi yang mungkin dari A ke B.
   b. Buatlah dua relasi yang mungkin dari B ke A.
4. Diketahui P = {–2, –1, 0, 1, 2} dan Q = {0, 1, 2, 3}.
   a. Buatlah relasi dari P ke Q.
   b. Buatlah relasi dari Q ke P.

2. Cara Menyajikan Suatu Relasi

Suatu relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu dengan diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Untuk memahami hal tersebut, perhatikan uraian berikut ini.

Pengambilan data mengenai pelajaran yang disukai pada empat siswa kelas VIII diperoleh seperti pada tabel berikut.

Tabel 2.1

Nama Siswa	Pelajaran yang Disukai
Buyung	IPS, Kesenian
Doni	Keterampilan, Olahraga
Vita	IPA
Putri	Matematika, Bahasa Inggris

(Menumbuhkan kreativitas)

Amatilah kejadian sehari-hari di lingkungan sekitarmu. Berilah 5 contoh kejadian yang merupakan relasi. Ceritakan pengalamanmu secara singkat di depan kelas.

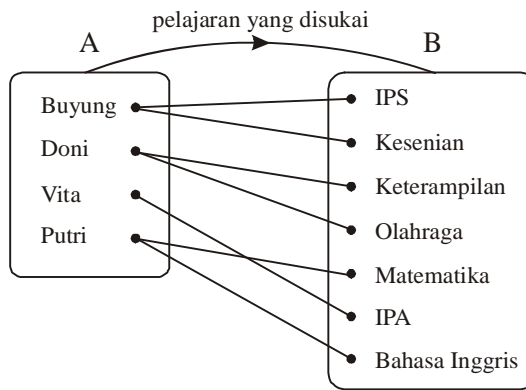
Tabel 2.1 di atas dapat dinyatakan dengan diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan seperti di bawah ini.

Misalkan A = {Buyung, Doni, Vita, Putri}, B = {IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}, dan "pelajaran yang disukai" adalah relasi yang menghubungkan himpunan A ke himpunan B.

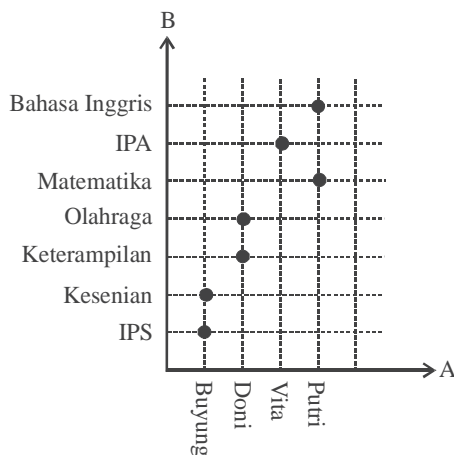
a. Dengan diagram panah

Gambar 2.2 di bawah menunjukkan relasi pelajaran yang disukai dari himpunan A ke himpunan B. Arah panah menunjukkan anggota-anggota himpunan A yang berelasi dengan anggota-anggota tertentu pada himpunan B.

(Menumbuhkan kreativitas)

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 6 orang, 3 pria, dan 3 wanita. Tanyakan hobi tiap anggota kelompokmu. Lalu, sajikan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

Gambar 2.2

b. *Dengan diagram Cartesius*

Relasi antara himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan diagram Cartesius. Anggota-anggota himpunan A berada pada sumbu mendatar dan anggota-anggota himpunan B berada pada sumbu tegak. Setiap pasangan anggota himpunan A yang berelasi dengan anggota himpunan B dinyatakan dengan titik atau noktah. Gambar 2.3 menunjukkan diagram Cartesius dari relasi pelajaran yang disukai dari data pada tabel 2.1.

Gambar 2.3

c. *Dengan himpunan pasangan berurutan*

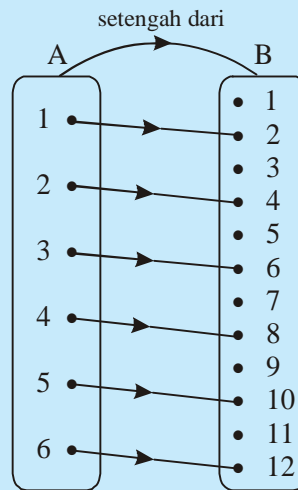
Himpunan pasangan berurutan dari data pada tabel 2.1 sebagai berikut.

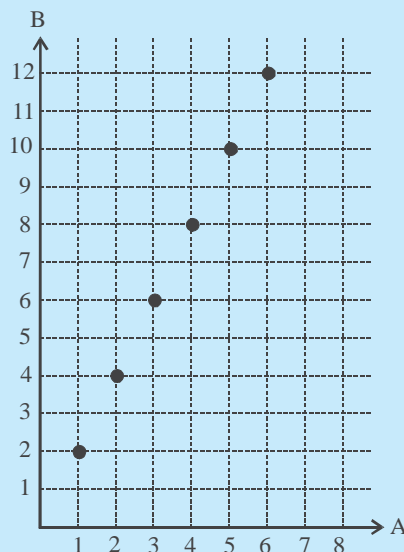
{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)}.

Diketahui A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; B = {1, 2, 3, ..., 12}; dan relasi dari A ke B adalah relasi "setengah dari". Nyatakan relasi tersebut dalam bentuk

a. diagram panah;
b. diagram Cartesius;
c. himpunan pasangan berurutan.

Penyelesaian:

a. Dengan diagram panah

Gambar 2.4

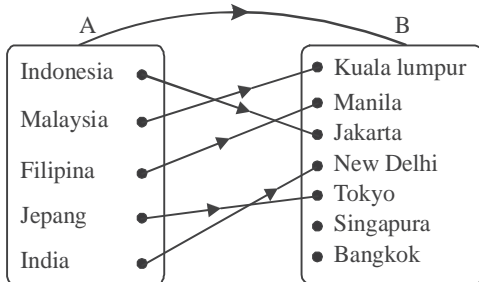
b. Dengan diagram Cartesius

Gambar 2.5

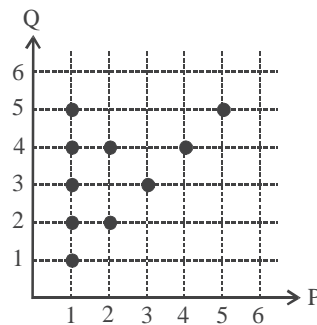
c. Dengan himpunan pasangan berurutan

Misalkan relasi "setengah dari" dari himpunan A ke himpunan B adalah R, maka R = {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)}.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Diketahui Sinta suka minum susu dan teh, Ketut suka minum kopi, Ita suka minum teh, dan Tio suka minum sprite. Nyatakan relasi tersebut dalam bentuk
   a. diagram panah;
   b. diagram Cartesius;
   c. himpunan pasangan berurutan.
2. Relasi dari himpunan A ke himpunan B ditunjukkan pada diagram panah berikut.

   a. Nyatakan relasi yang mungkin dari himpunan A ke himpunan B.
   b. Nyatakan relasi dari A ke B dalam bentuk diagram Cartesius.
   c. Nyatakan relasi dari A ke B dalam bentuk himpunan pasangan berurutan.
3. Relasi dari A = {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*} ke B = {*b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*} dinyatakan sebagai R = {(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*e*, *f*), (*i*, *d*), (*o*, *g*), (*o*, *h*), (*u*, *h*)}.

   Nyatakan relasi tersebut ke dalam bentuk diagram panah dan diagram Cartesius.
4. Relasi dari himpunan P ke himpunan Q disajikan dalam diagram Cartesius berikut.

   Tentukan relasi yang memenuhi dari diagram tersebut, kemudian nyatakan dalam diagram panah dan himpunan pasangan berurutan.
5. Buatlah relasi "akar dari" dari himpunan P = {2, 3, 4, 5} ke himpunan Q = {1, 2, 4, 9, 12, 16, 20, 25} dengan
   a. diagram panah;
   b. diagram Cartesius;
   c. himpunan pasangan berurutan.

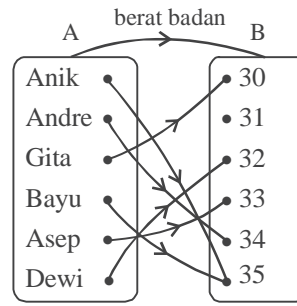
B. FUNGSI ATAU PEMETAAN

1. Pengertian Fungsi

Agar kalian memahami pengertian fungsi, perhatikan uraian berikut.

Pengambilan data mengenai berat badan dari enam siswa kelas VIII disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2

Nama Siswa	Berat Badan (kg)
Anik	35
Andre	34
Gita	30
Bayu	35
Asep	33
Dewi	32

Gambar 2.6

Gambar 2.6 merupakan diagram panah yang menunjukkan relasi berat badan dari data pada Tabel 2.2.

Dari diagram panah pada Gambar 2.6 dapat diketahui hal-hal sebagai berikut.

a. Setiap siswa memiliki berat badan.

   Hal ini berarti setiap anggota A mempunyai kawan atau pasangan dengan anggota B.

b. Setiap siswa memiliki tepat satu berat badan.

   Hal ini berarti setiap anggota A mempunyai tepat satu kawan atau pasangan dengan anggota B.

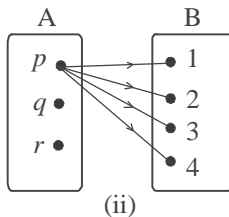
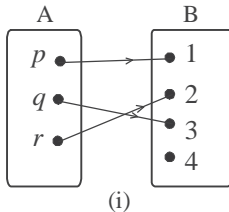
Berdasarkan uraian di atas dapat kita ambil kesimpulan bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Relasi yang demikian dinamakan *fungsi (pemetaan)*. Jadi, fungsi (pemetaan) dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Syarat suatu relasi merupakan pemetaan atau fungsi adalah
a. setiap anggota A mempunyai pasangan di B;
b. setiap anggota A dipasangkan dengan *tepat satu* anggota B.

Diskusi

(Menumbuhkan inovasi)

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 2 orang, 1 pria, dan 1 wanita. Cari dan amati kejadian-kejadian di lingkungan sekitarmu. Tulislah hal-hal yang termasuk fungsi sebanyak 4 buah.
Lalu sajikan hasil temuanmu dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Tulislah dalam sebuah laporan dan kumpulkan kepada gurumu.

Di antara relasi yang disajikan pada diagram panah berikut manakah yang merupakan fungsi? Berilah alasannya.

Gambar 2.7

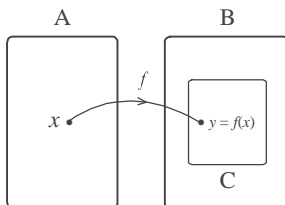
Penyelesaian:

(i) Diagram panah pada (i) merupakan fungsi, karena setiap anggota A mempunyai tepat satu pasangan di B.

(ii) Diagram panah pada (ii) bukan fungsi, karena terdapat anggota A yaitu p mempunyai empat pasangan di B dan ada anggota A yaitu q dan r tidak mempunyai pasangan di B.

2. Notasi dan Nilai Fungsi

Gambar 2.8

Diagram di samping menggambarkan fungsi yang memetakan x anggota himpunan A ke y anggota himpunan B. Notasi fungsinya dapat ditulis sebagai berikut.

$$f : x \mapsto y \text{ atau } f : x \mapsto f(x)$$

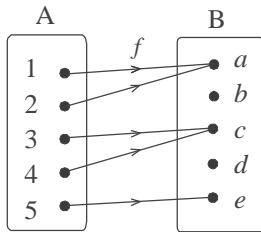
dibaca: fungsi f memetakan x anggota A ke y anggota B

Himpunan A disebut *domain* (daerah asal).

Himpunan B disebut *kodomain* (daerah kawan).

Himpunan C $\subset$ B yang memuat y disebut *range* (daerah hasil).

Dalam hal ini, $y = f(x)$ disebut bayangan (peta) x oleh fungsi f. Variabel x dapat diganti dengan sebarang anggota himpunan A dan disebut *variabel bebas*. Adapun variabel y anggota himpunan B yang merupakan bayangan x oleh fungsi f ditentukan (bergantung pada) oleh aturan yang didefinisikan, dan disebut *variabel bergantung*.

Misalkan bentuk fungsi $f(x) = ax + b$. Untuk menentukan nilai fungsi untuk x tertentu, dengan cara mengganti (menyubstitusi) nilai x pada bentuk fungsi $f(x) = ax + b$.

Gambar 2.9

a. Perhatikan diagram panah pada Gambar 2.9. Tentukan
   (i) domain;
   (ii) kodomain;
   (iii) range;
   (iv) bayangan dari 1, 2, 3, 4, dan 5 oleh fungsi f.

Penyelesaian:

(i) Domain = A = {1, 2, 3, 4, 5}

(ii) Kodomain = B = $\{a, b, c, d, e\}$

(iii) Range = $\{a, c, e\}$

(iv) Bayangan 1 oleh fungsi f adalah $f(1) = a$.
Bayangan 2 oleh fungsi f adalah $f(2) = a$.
Bayangan 3 oleh fungsi f adalah $f(3) = c$.
Bayangan 4 oleh fungsi f adalah $f(4) = c$.
Bayangan 5 oleh fungsi f adalah $f(5) = e$.

b. Diketahui fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
   Tentukan nilai fungsi $f(x)$ untuk
   (i) $x = 2$;
   (ii) $x = -3$.

Penyelesaian:

(i) Substitusi nilai $x = 2$ ke fungsi $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$,
sehingga $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$f(2) = 2x^2 - 3 \times 2 + 1$$
$$= 8 - 6 + 1 = 3$$

(ii) Substitusi nilai $x = -3$ ke fungsi $f(x)$,
sehingga diperoleh $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 3 \times (-3) + 1$$
$$= 18 + 9 + 1$$
$$= 28$$

Uji Kompetensi 3

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

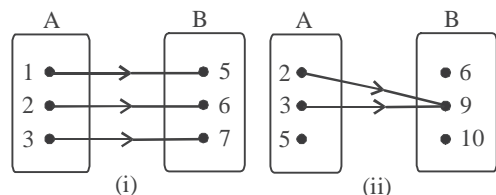
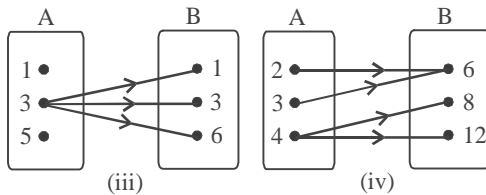
1. Di antara diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi? Berikan alasannya.

A: 1, 2, 3 → B: 5, 6, 7

(i)

A: 2, 3, 5 → B: 6, 9, 10

(ii)

(iii) (iv)

2. Diketahui relasi dari himpunan P = {a, b, c, d} ke himpunan Q = {e, f, g} dengan ketentuan $a \to e$, $b \to e$, $c \to e$, dan $c \to f$. Apakah relasi tersebut merupakan suatu fungsi? Mengapa? Jelaskan jawabanmu.
3. Di antara relasi dalam himpunan pasangan berurutan berikut, tentukan manakah yang merupakan suatu fungsi dari himpunan A = {a, b, c, d} ke himpunan B = {1, 2, 3, 4}. Tentukan pula daerah hasil masing-masing fungsi.
   a. {(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)}
   b. {(a, 2), (b, 4), (c, 4)}
   c. {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)}
   d. {(a, 1), (b, 4), (c, 1), (d, 4)}
   e. {(d, 1), (d, 2), (b, 2), (c, 3), (d, 4)}
4. Diketahui daerah asal suatu fungsi P = {1, 3, 7, 8} ke himpunan bilangan asli Q dengan relasi "setengah dari".
   a. Tulislah notasi fungsi untuk relasi tersebut.
   b. Tentukan rangenya.
   c. Tentukan bayangan 3 oleh fungsi f.
5. Jika A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B himpunan bilangan bulat, relasi berikut ini manakah yang merupakan pemetaan dari A ke B? Berikan alasannya.
   a. Kurang dari.
   b. Faktor dari.
   c. Akar kuadrat dari.
   d. Dua kurangnya dari.
6. Diketahui fungsi $f: x \to 4x - 1$. Tentukan nilai fungsi f untuk $x = -5, -3, -1, 0, 2, 4$, dan 10.
7. Fungsi f didefinisikan sebagai
   $f(x) = -2x + 3$.
   a. Tentukan bayangan $x = -1$ oleh fungsi tersebut.
   b. Tentukan nilai x jika $f(x) = 1$.

3. Menyatakan Fungsi dalam Diagram Panah, Diagram Cartesius, dan Himpunan Pasangan Berurutan

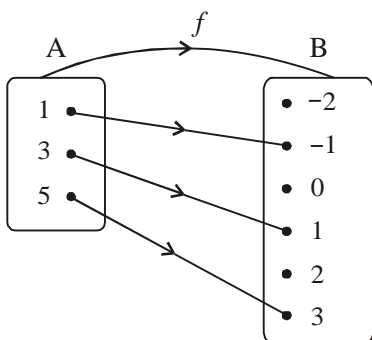
Kalian telah mempelajari bahwa suatu relasi dapat dinyatakan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Karena fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, maka fungsi juga dapat dinyatakan dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

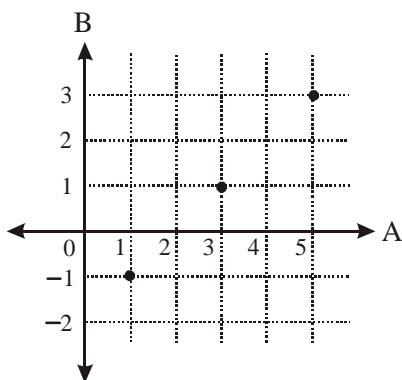
Misalkan A = {1, 3, 5} dan B = {–2, –1, 0, 1, 2, 3}. Jika fungsi f: A $\to$ B ditentukan dengan $f(x) = x - 2$ maka

$f(1) = 1 - 2 = -1$

$f(3) = 3 - 2 = 1$

$f(5) = 5 - 2 = 3$

a. Diagram panah yang menggambarkan fungsi f tersebut sebagai berikut.

Gambar 2.10

b. Diagram Cartesius dari fungsi f sebagai berikut.

Gambar 2.11

c. Himpunan pasangan berurutan dari fungsi f tersebut adalah {(1, –1), (3, 1), (5, 3)}. Perhatikan bahwa setiap anggota A muncul tepat satu kali pada komponen pertama pada pasangan berurutan.

4. Menentukan Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari Dua Himpunan

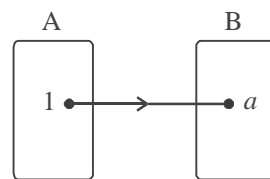
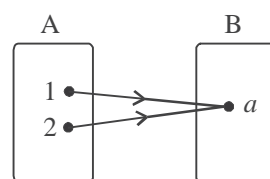
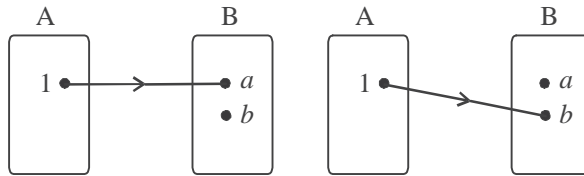
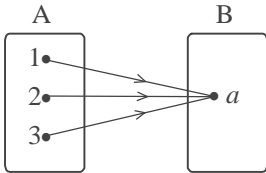
Untuk menentukan banyaknya pemetaan yang mungkin dari dua himpunan, perhatikan uraian berikut.

a. Jika A = {1} dan B = {a} maka n(A) = 1 dan n(B) = 1. Satu-satunya pemetaan yang mungkin dari A ke B mempunyai diagram panah seperti tampak pada Gambar 2.12.

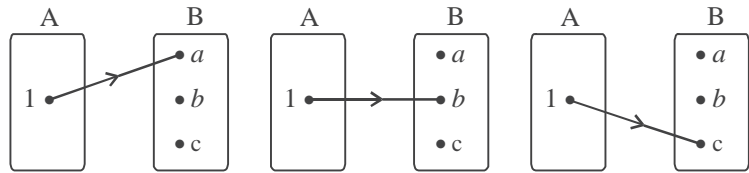
Gambar 2.12

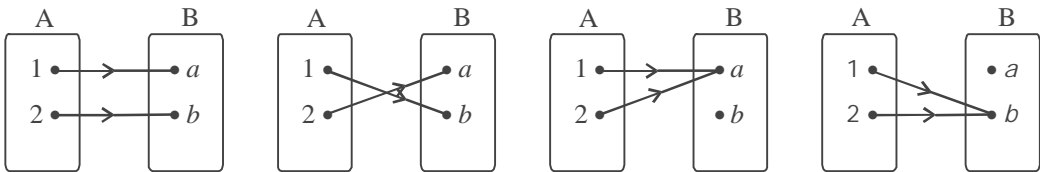
b. Jika A = {1, 2} dan B = {a} maka n(A) = 2 dan n(B) = 1. Pemetaan yang mungkin dari himpunan A ke B tampak seperti diagram panah pada Gambar 2.13.

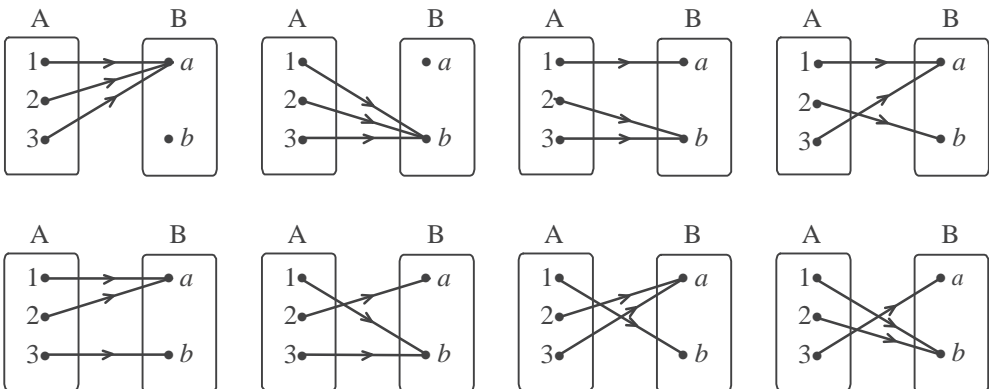
Gambar 2.13

c. Jika A = {1} dan B = {a, b} maka n(A) = 1 dan n(B) = 2. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada dua, seperti tampak pada diagram panah pada Gambar 2.14.

Gambar 2.14

Gambar 2.15

d. Jika A = {1, 2, 3} dan B = {a} maka n(A) = 3 dan n(B) = 1. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada satu, seperti tampak pada diagram panah pada Gambar 2.15.

e. Jika A = {1} dan B {a, b, c} maka n(A) = 1 dan n(B) = 3. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada tiga, seperti tampak pada diagram panah berikut ini.

Gambar 2.16

f. Jika A = {1, 2} dan B = {a, b} maka n(A) = 2 dan n(B) = 2. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada empat, seperti tampak pada diagram panah pada Gambar 2.17.

Gambar 2.17

g. Jika A = {1, 2, 3} dan B= {a, b} maka n(A) = 3 dan n(B) = 2. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B ada 8, seperti tampak pada diagram panah pada Gambar 2.18.

Gambar 2.18

Dengan mengamati uraian tersebut, untuk menentukan banyaknya pemetaan dari suatu himpunan A ke himpunan B dapat dilihat pada tabel berikut.

Banyaknya Anggota		**Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari A ke B**	**Banyaknya Pemetaan yang Mungkin dari B ke A**
Himpunan A	**Himpunan B**		
1	1	$1 = 1^1$	$1 = 1^1$
2	1	$1 = 1^2$	$2 = 2^1$
1	2	$2 = 2^1$	$1 = 1^2$
3	1	$1 = 1^3$	$3 = 3^1$
1	3	$3 = 3^1$	$1 = 1^3$
2	2	$4 = 2^2$	$4 = 2^2$
3	2	$8 = 2^3$	$9 = 3^2$

Berdasarkan pengamatan pada tabel di atas, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Jika banyaknya anggota himpunan A adalah $n(A) = a$ dan banyaknya anggota himpunan B adalah $n(B) = b$ maka

1. banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah b^a;
2. banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A adalah a^b.

Jika A = {bilangan prima kurang dari 5} dan B = {huruf vokal}, hitunglah banyaknya pemetaan

a. dari A ke B;
b. dari B ke A, tanpa menggambar diagram panahnya.

Penyelesaian:

a. A = {2, 3}, $n(A) = 2$

B = {a, e, i, o, u}, $n(B) = 5$

Banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B = b^a $= 5^2 = 25$

b. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A = a^b $= 2^5 = 32$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Diketahui P adalah himpunan bilangan cacah kurang dari 6 dan Q adalah himpunan bilangan real . Relasi dari P ke Q ditentukan oleh $f : x \rightarrow 3x - 5$.
   a. Apakah relasi itu merupakan suatu pemetaan? Jelaskan.
   b. Sebutkan daerah asalnya.
   c. Sebutkan daerah kawannya.
   d. Sebutkan daerah hasilnya.
   e. Tentukan $f(0)$, $f(2)$, dan $f(4)$.
   f. Tentukan nilai x yang memenuhi $f(x) = 25$.
2. Gambarlah diagram panah yang mungkin dari himpunan A ke himpunan B dari setiap pemetaan berikut.
   a. A = $\{p, q\}$, B = $\{1, 2, 3\}$
   b. A = $\{p, q, r\}$, B = $\{1, 2\}$
3. Jika A = $\{x | -2 < x < 2, x \in \text{B}\}$ dan B = $\{x \mid x \text{ bilangan prima} < 8\}$, tentukan
   a. banyaknya pemetaan dari A ke B;
   b. banyaknya pemetaan dari B ke A.
4. Suatu fungsi dari A ke B didefinisikan sebagai $f(x) = -2x + 7$. Jika A = $\{x \mid -1 < x \leq 5\}$ dan B adalah himpunan bilangan bulat maka
   a. tentukan $f(x)$ untuk setiap $x \in$ A;
   b. gambarlah fungsi $f(x)$ dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

C. MENENTUKAN RUMUS FUNGSI JIKA NILAINYA DIKETAHUI

Soal Tantangan

Diketahui suatu fungsi $f(x) = ax + b$, dengan $f(1) = 3$ dan $f(-2) = 9$. Tentukan bentuk fungsi $f(x)$.

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari cara menentukan nilai fungsi jika rumus fungsinya diketahui. Sekarang, kalian akan mempelajari kebalikan dari kasus tersebut, yaitu jika nilai fungsinya diketahui.

Pada pembahasan ini bentuk fungsi yang kalian pelajari hanyalah *fungsi linear* saja, yaitu $f(x) = ax + b$. Untuk bentuk fungsi kuadrat dan pangkat tinggi akan kalian pelajari pada tingkat yang lebih tinggi.

Misalkan fungsi f dinyatakan dengan $f : x \mapsto ax + b$, dengan a dan b konstanta dan x variabel maka rumus fungsinya adalah $f(x) = ax + b$. Jika nilai variabel $x = m$ maka nilai $f(m) = am + b$. Dengan demikian, kita dapat menentukan bentuk fungsi f jika diketahui nilai-nilai fungsinya. Selanjutnya, nilai konstanta a dan b ditentukan berdasarkan nilai-nilai fungsi yang diketahui.

Agar kalian mudah memahaminya pelajarilah contoh berikut.

Diketahui f fungsi linear dengan $f(0) = -5$ dan $f(-2) = -9$. Tentukan bentuk fungsi $f(x)$.

Penyelesaian:

Karena f fungsi linear, maka $f(x) = ax + b$.

Dengan demikian diperoleh

$$f(0) = -5$$
$$f(0) = a\,(0) + b = -5$$
$$0 + b = -5$$
$$b = -5$$

Untuk menentukan nilai a, perhatikan langkah berikut.

$$f(-2) = -9$$
$$f(-2) = a\,(-2) + b = -9$$
$$-2a - 5 = -9$$
$$-2a = -9 + 5$$
$$-2a = -4$$
$$a = \frac{-4}{-2}$$
$$a = 2$$

Jadi, fungsi yang dimaksud adalah $f(x) = ax + b = 2x - 5$.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Diketahui suatu fungsi linear $f(x) = 2x + m$. Tentukan bentuk fungsi tersebut jika $f(3) = 4$.
2. Jika $f(x) = ax + b$, $f(1) = 2$, dan $f(2) = 1$ maka tentukan
   a. bentuk fungsi $f(x)$;
   b. bentuk paling sederhana dari $f(x - 1)$;
   c. bentuk paling sederhana dari $f(x) + f(x - 1)$.
3. Diketahui $f(x) = ax + b$. Tentukan bentuk fungsi-fungsi berikut jika
   a. $f(1) = 3$ dan $f(2) = 5$;
   b. $f(0) = -6$ dan $f(3) = -5$;
   c. $f(2) = 3$ dan $f(4) = 4$.
4. Diketahui $f(x) = (x + a) + 3$ dan $f(2) = 7$. Tentukan
   a. bentuk fungsi $f(x)$;
   b. nilai $f(-1)$;
   c. nilai $f(-2) + f(-1)$;
   d. bentuk fungsi $f(2x - 5)$.
5. Diketahui dua buah fungsi, yaitu

   $f(x) = 2 - \frac{a}{2}x$ dan $g(x) = 2 - (a - 3)x$.

   Jika $f(x) = g(x)$, tentukan
   a. nilai a;
   b. bentuk fungsi $f(x)$ dan $g(x)$;
   c. bentuk fungsi $f(x) + g(x)$;
   d. nilai $f(-1)$, $f(2)$, $g(1)$, dan $g(4)$

D. MENGHITUNG NILAI PERUBAHAN FUNGSI JIKA NILAI VARIABEL BERUBAH

Kalian telah mempelajari bahwa suatu fungsi $f(x)$ mempunyai variabel x dan untuk nilai variabel x tertentu, kita dapat menghitung nilai fungsinya. Jika nilai variabel suatu fungsi berubah maka akan menyebabkan perubahan pada nilai fungsinya.

Misalkan fungsi f ditentukan oleh $f : x \mapsto 5x + 3$ dengan domain $\{x / -1 \leq x \leq 3, x \in$ bilangan bulat$\}$. Nilai fungsi dari variabel x adalah

$f(-1) = 5(-1) + 3 = -2;$

$f(0) = 5(0) + 3 = 3;$

$f(1) = 5(1) + 3 = 8;$

$f(2) = 5(2) + 3 = 13;$

$f(3) = 5(3) + 3 = 18;$

Jika variabel x diubah menjadi $x + 3$ maka kita harus menentukan nilai dari fungsi $f(x + 3)$. Untuk menentukan nilai $f(x + 3)$, terlebih dahulu kalian harus menentukan variabel baru, yaitu $(x + 3)$ sehingga diperoleh nilai-nilai variabel baru sebagai berikut.

$-1 + 3 = 2$

$0 + 3 = 3$

$1 + 3 = 4$

$2 + 3 = 5$

$3 + 3 = 6$

Setelah kalian menentukan nilai-nilai variabel baru, yaitu $(x + 3) = 2, 3, 4, 5, 6$, tentukan nilai-nilai $f(x + 3)$ berdasarkan pemetaan $f : (x + 3) \to 5(x + 3) + 3$.

Dengan demikian, diperoleh

$f(2) = 5\ (2) + 3 = 13;$

$f(3) = 5\ (3) + 3 = 18;$

$f(4) = 5\ (4) + 3 = 23;$

$f(5) = 5\ (5) + 3 = 28;$

$f(6) = 5\ (6) + 3 = 33;$

Nilai perubahan fungsi dari $f(x)$ menjadi $f(x + 3)$ yaitu selisih antara $f(x)$ dan $f(x + 3)$, dituliskan $f(x + 3) - f(x)$.

Soal Tantangan

Diketahui suatu fungsi dinyatakan dengan $f : x \to x^2 - 1$, untuk x bilangan bulat.

a. Tentukan rumus fungsi $f(2x + 2)$ dan nilai-nilainya untuk $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
b. Tentukan rumus fungsi $f(x + a)$ untuk suatu a bilangan bulat dan tentukan nilai perubahan fungsi $f(x + a) - f(x)$.
c. Jika x adalah variabel pada himpunan bilangan real, tentukan nilai perubahan fungsi $f(x) - f(x - a)$, untuk suatu a bilangan real.

Untuk menentukan nilai perubahan fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan seperti tabel berikut.

x	–1	0	1	2	3
$f(x) = 5x + 3$	–2	3	8	13	18
$x + 3$	2	3	4	5	6
$f(x + 3) = 5(x + 3) + 3$	13	18	23	28	33
$f(x + 3) - f(x)$	15	15	15	15	15

Berdasarkan tabel di atas tampak bahwa untuk semua nilai $x \in$ domain, nilai perubahan fungsi $f(x + 3) – f(x) = 15$.

Cara lain untuk menentukan nilai perubahan fungsi sebagai berikut.

Tentukan terlebih dahulu fungsi $f(x + 3)$.

Diketahui $f(x) = 5x + 3$ maka

$$\begin{aligned} f(x + 3) &= 5(x + 3) + 3 \\ &= 5x + 15 + 3 \\ &= 5x + 18 \end{aligned}$$

Nilai perubahan fungsi dari $f(x)$ menjadi $f(x + 3)$ adalah selisih antara $f(x)$ dan $f(x + 3)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x + 3) - f(x) &= (5x + 18) - (5x + 3) \\ &= 5x + 18 - 5x - 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2x - 6$.
   a. Tentukan rumus fungsi yang paling sederhana dari $f(x + 1)$, $f(2x - 1)$, dan $f(x^2)$.
   b. Tentukan rumus fungsi untuk $f(x - a)$ untuk suatu bilangan asli a dan tentukan perubahan fungsi $f(x + a) - f(x)$.
2. Jika fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = 4x + 3$, untuk x bilangan real maka tentukan rumus fungsi yang paling sederhana dari $f(x - 3)$ dan $f(x) - f(x - 3)$.
3. Diketahui fungsi $f(x) = 2x$ untuk suatu x bilangan real.
   a. Apakah fungsi $f(-x) = -f(x)$?
   b. Bagaimana dengan fungsi $f(x) = x^2$? Apakah $f(-x) = -f(x)$?
4. Jika $f(x) = x + 1$ untuk x bilangan ganjil, apakah fungsi $f(-(x + 2)) = f(-x - 2)$?
5. Jika $f(x) = 4x - 5$ untuk x bilangan real maka tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $f(x) = f(2x + 1)$.

E. GRAFIK FUNGSI/PEMETAAN

Suatu pemetaan atau fungsi dari himpunan A ke himpunan B dapat dibuat grafik pemetaannya. Grafik suatu pemetaan (fungsi) adalah bentuk diagram Cartesius dari suatu pemetaan (fungsi).

Gambarlah grafik fungsi $f : x \mapsto x + 3$ dengan domain

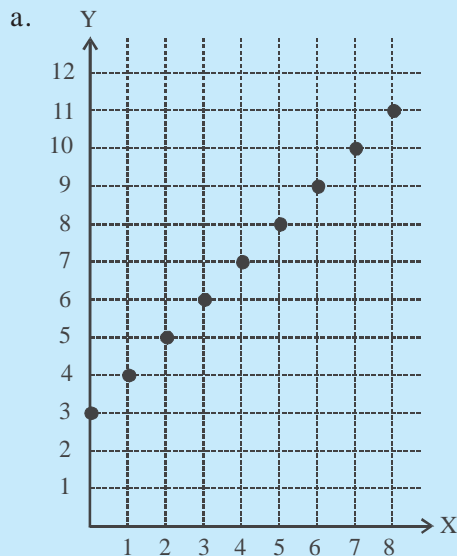
a. $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in$ bilangan bulat$\}$;

b. $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in$ bilangan real$\}$.

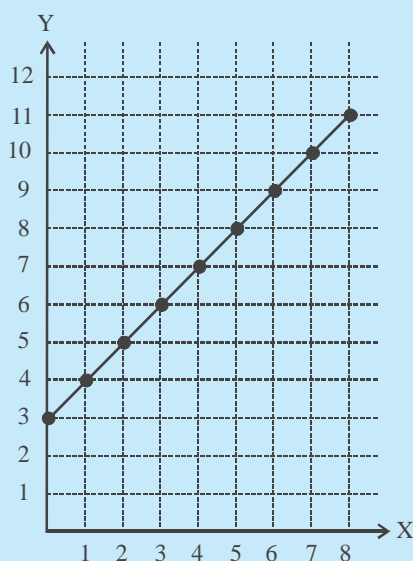
Penyelesaian:

Untuk memudahkan menggambar grafik fungsi $f : x \mapsto x + 3$, kita buat terlebih dahulu tabel yang memenuhi fungsi tersebut, sehingga diperoleh koordinat titik-titik yang memenuhi.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = x + 3$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(x, y)	(0, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 6)	(4, 7)	(5, 8)	(6, 9)	(7, 10)	(8, 11)

a.

Gambar 2.19

Berdasarkan Gambar 2.19, tampak bahwa grafik fungsi $f : x \mapsto x + 3$, dengan $\{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in$ bilangan bulat$\}$, berupa titik-titik (noktah) saja.

b.

Gambar 2.20

Pada Gambar 2.20 tampak grafik fungsi $f : x \mapsto x + 3$, dengan $\{x \mid 0 \le x \le 8, x \in$ bilangan real$\}$. Titik-titik yang ada dihubungkan hingga membentuk kurva/garis lurus. Mengapa?

Fungsi f pada himpunan bilangan real (R) yang ditentukan oleh rumus $f(x) = ax + b$ dengan $a, b \in$ R dan $a \neq 0$ disebut *fungsi linear*. Grafik fungsi linear berupa suatu garis lurus dengan persamaan $y = ax + b$. Grafik fungsi linear akan kalian pelajari pada bab selanjutnya.

Uji Kompetensi 7

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

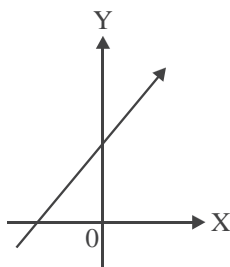
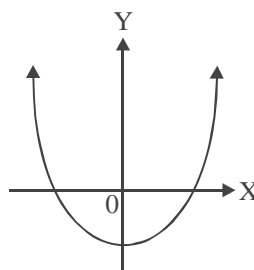
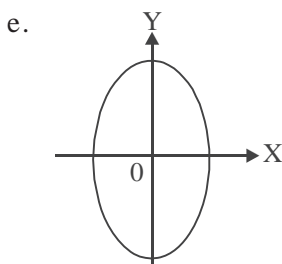
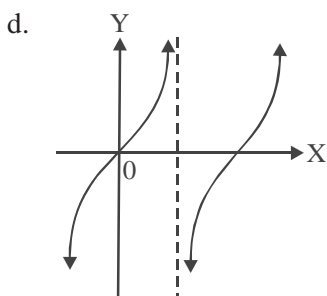
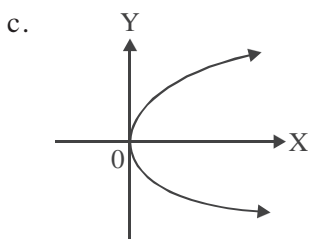
1. Di antara grafik berikut manakah yang merupakan grafik fungsi dari $f(x)$ jika sumbu X adalah daerah asal?

a.

b.

c.

d.

e.

2. Fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai $f(x) = x^2 + x$ dengan domain

   A = $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \text{R}\}$ ke himpunan bilangan real R.

   a. Gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius.
   b. Berbentuk apakah grafik tersebut?

3. Diketahui fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai $f(x) = 2x^2 - 1$.
   a. Gambar grafiknya pada bidang Cartesius jika x adalah variabel pada himpunan bilangan cacah.

      Berbentuk apakah grafik tersebut?
   b. Gambar grafiknya pada bidang Cartesius jika x adalah variabel pada himpunan bilangan real.

      Berbentuk apakah grafik tersebut?

4. Fungsi $f(x)$ dirumuskan dengan $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ dengan domain $\{x \mid 1 \leq x \leq 12;$ $x \in \text{C}\}$ ke himpunan bilangan cacah.
   a. Buatlah tabel pasangan nilai x dan y yang memenuhi fungsi tersebut.
   b. Gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius.

5. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow 3x - 5$ dengan domain P = $\{x \mid 0 \leq x \leq 5, x \in \text{C}\}$ ke himpunan bilangan real.
   a. Gambarlah grafiknya pada bidang Cartesius.
   b. Berbentuk apakah grafik fungsi tersebut?

F. KORESPONDENSI SATU-SATU

Sumber: *Dok. Penerbit*

Gambar 2.21

Agar kalian memahami pengertian korespondensi satu-satu, perhatikan Gambar 2.21.

Perhatikan deretan rumah di suatu kompleks rumah (perumahan). Setiap rumah memiliki nomor rumah tertentu yang berbeda dengan nomor rumah yang lain.

Mungkinkah satu rumah memiliki dua nomor rumah? Atau mungkinkah dua rumah memiliki nomor rumah yang sama? Tentu saja jawabannya tidak. Keadaan sebuah rumah memiliki satu nomor rumah atau satu nomor rumah dimiliki oleh sebuah rumah dikatakan sebagai *korespondensi satu-satu*.

Contoh lain yang menggambarkan korespondensi satu-satu sebagai berikut. Enam orang siswa bermain bola voli dengan nomor punggung 301 – 306. Ternyata

Bonar bernomor punggung 301;

Asti bernomor punggung 302;

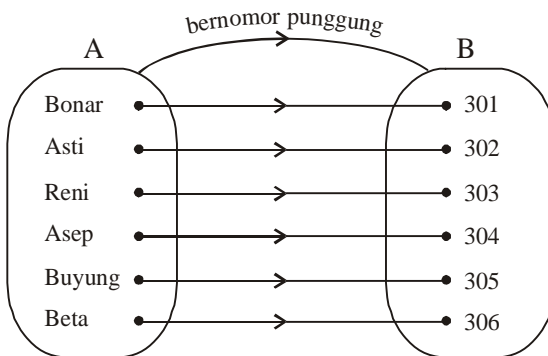
Reni bernomor punggung 303;

Asep bernomor punggung 304;

Buyung bernomor punggung 305;

Beta bernomor punggung 306.

Selanjutnya, jika kita misalkan A = {Bonar, Asti, Reni, Asep, Buyung, Beta} dan B = {301, 302, 303, 304, 305, 306} maka "bernomor punggung" adalah relasi dari A ke B.

Relasi "bernomor punggung" dari himpunan A ke himpunan B pada kasus di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram panah berikut.

Gambar 2.22

Perhatikan bahwa setiap anggota A mempunyai tepat satu kawan di B. Dengan demikian, relasi "bernomor punggung" dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu pemetaan. Selanjutnya, amati bahwa setiap anggota B yang merupakan peta (bayangan) dari anggota A dikawankan dengan tepat satu anggota A.

Pemetaan dua arah seperti contoh di atas disebut *korespondensi satu-satu* atau *perkawanan satu-satu*.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Korespondensi satu-satu adalah fungsi yang memetakan anggota dari himpunan A dan B, dimana semua anggota A dan B dapat dipasangkan sedemikian sehingga setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B dan setiap anggota B berpasangan dengan tepat satu anggota A. Jadi, banyak anggota himpunan A dan B harus sama atau $n(A) = n(B)$.

(Menumbuhkan kreativitas)

Tulislah kejadian sehari-hari di lingkungan sekitarmu yang merupakan contoh korespondensi satu-satu.
Ceritakan hasil temuanmu secara singkat di depan kelas.

Diskusi

(Berpikir kritis)

Buatlah kelompok terdiri atas 4 orang, 2 pria dan 2 wanita.
Untuk menentukan banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan B, buatlah diagram-diagram panah yang mungkin jika banyak anggota A dan B seperti pada tabel berikut. Salin dan lengkapi tabel berikut. Kemudian, buatlah kesimpulannya.

Banyak Anggota Himpunan A = n(A)	Banyak Anggota Himpunan B = n(B)	Banyak Korespondensi Satu-Satu yang Mungkin antara Himpunan A dan B
2	2	$2 = 2 \times 1$
3	3	$6 = 3 \times 2 \times 1$
4	4	$24 = 4 \times ... \times ... \times ...$
5	5	....
....	....	....
n	n	....

Jika kalian mengerjakannya dengan tepat maka kalian akan menyimpulkan seperti berikut ini.

Jika $n(A) = n(B) = n$ maka banyak korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan B adalah
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1.$
$n!$ dibaca : n faktorial.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

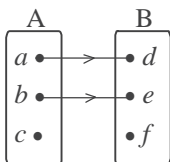
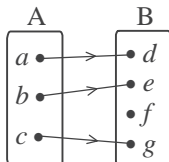
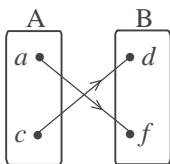
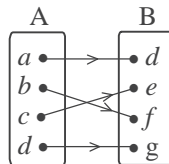
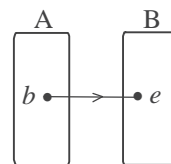
1. Di antara diagram panah di bawah ini, manakah yang menunjukkan korespondensi satu-satu?

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

2. Jika P = {–2, –1, 0, 1, 2}, apakah fungsi $f : P \rightarrow P$ yang didefinisikan di bawah ini merupakan korespondensi satu-satu?
   a. $f : x \mapsto -x$
   b. $f : x \mapsto x^2$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{untuk } x = -2, -1, 0 \\ -\dfrac{1}{x}, \text{untuk } x = 1, 2 \end{cases}$

d. $f(x) = 2x^2 - 1$

3. Diketahui R = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} dan S = {bilangan cacah}.

   Suatu pemetaan $g : R \rightarrow S$ didefinisikan sebagai berikut.

   - $g : x \mapsto x^2 + 1$, untuk $x = -3, -2, -1$ dan
   - $g : x \mapsto 3x + 2$, untuk $x = 0, 1, 2, 3$

   a. Tentukan daerah hasil pemetaan itu.

   b. Gambarlah diagram Cartesius pemetaan itu.

   c. Nyatakan pemetaan tersebut dalam himpunan pasangan berurutan.

   d. Apakah pemetaan tersebut termasuk korespondensi satu-satu? Mengapa?

4. Di antara dua himpunan berikut ini manakah yang dapat dibuat korespondensi satu-satu?

   a. A = {nama hari dalam seminggu}
      B = {bilangan prima antara 1 dan 11}

   b. P = {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*}
      Q = {lima kota besar di Pulau Jawa}

   c. A = {nama bulan dalam setahun}
      B = {nama hari dalam seminggu}

   d. C = {bilangan genap kurang dari 10}
      D = {bilangan prima kurang dari 10}

5. Berapa banyak korespondensi satu-satu yang dapat dibuat dari himpunan berikut?

   a. A = {faktor dari 6} dan
      B = {faktor dari 15}

   b. K = {huruf vokal} dan
      L = {bilangan cacah antara 0 dan 6}

Tugas Mandiri

(Berpikir Kritis)

Coba cek jawaban soal no. 5 pada Uji Kompetensi 8 dengan menggunakan kalkulator. Tekanlah notasi x! di kalkulator. Apakah hasilnya sama?

Rangkuman

1. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.
2. Suatu relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu dengan diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.
3. Fungsi (pemetaan) dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

4. Jika x anggota A (domain) dan y anggota B (kodomain) maka fungsi f yang memetakan x ke y dinotasikan dengan $f : x \mapsto y$, dibaca fungsi f memetakan x ke y atau x dipetakan ke y oleh fungsi f.
5. Jika banyaknya anggota himpunan A adalah $n(A) = a$ dan banyaknya anggota himpunan B adalah $n(B) = b$ maka
   a. banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B adalah b^a;
   b. banyaknya pemetaan yang mungkin dari B ke A adalah a^b.
6. Jika nilai variabel suatu fungsi berubah maka akan menyebabkan perubahan pada nilai fungsinya.
7. Dua himpunan A dan B dikatakan berkorespondensi satu-satu jika semua anggota A dan B dapat dipasangkan sedemikian sehingga setiap anggota A berpasangan dengan tepat satu anggota B dan setiap anggota B berpasangan dengan tepat satu anggota A.
8. Jika $n(A) = n(B) = n$ maka banyak korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan B adalah
   $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, apakah kalian sudah paham mengenai *Fungsi*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi ini dengan kata-katamu sendiri. Bagian mana dari materi ini yang belum kamu pahami? Catat dan tanyakan kepada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Kemukakan hal ini secara singkat di depan kelas.

Evaluasi 2

Kerjakan di buku tugasmu.

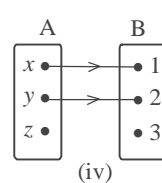
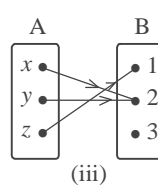
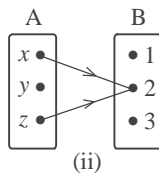
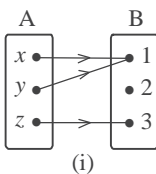
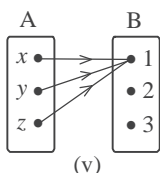
A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1.

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

Dari diagram panah di atas yang *bukan* merupakan pemetaan adalah ....

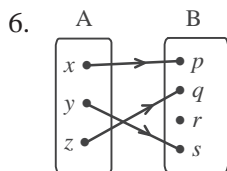
a. (i) dan (iii)
b. (ii) dan (iii)
c. (ii) dan (iv)
d. (iv) dan (v)

2. Himpunan pasangan berurutan yang menunjukkan fungsi $f : x \to 2x + 5$ dari domain {1, 3, 5, 7} adalah ....
   a. {(1, 7), (3, 11), (5, 15), (7, 19)}
   b. {(1, 5), (3, 5), (5, 5), (7, 5)}
   c. {(1, 2), (3, 7), (5, 9), (7, 11)}
   d. {(7, 1), (11, 3), (15, 5), (19, 7)}

3. Pada pemetaan {(1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 0), (5, 1)} domainnya adalah ....
   a. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   b. {1, 2, 3, 4, 5}
   c. {1, 2, 3}
   d. {0}

4. Jika $f(x) = x^2 + 4$ maka 29 adalah bayangan dari ....
   a. 2   c. 5
   b. 3   d. 6

5. Banyaknya pemetaan yang mungkin dari himpunan A = {*a*, *i*} ke himpunan A sendiri adalah ....
   a. 2   c. 4
   b. 3   d. 8

6.

   Di antara pernyataan berikut, yang *tidak* benar adalah ....
   a. domain = {*x*, *y*, *z*}
   b. kodomain = {*p*, *q*, *r*, *s*}
   c. $r \in$ B tidak mempunyai pasangan di A
   d. diagram tersebut menunjukkan korespondensi satu-satu

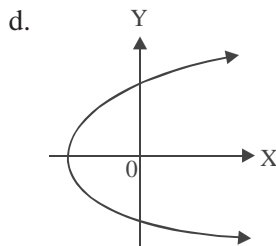
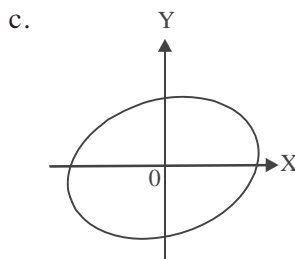
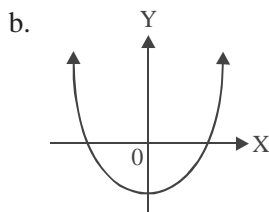
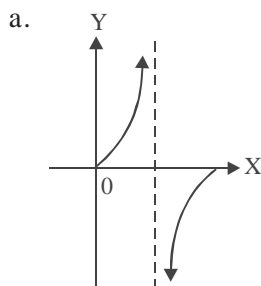
7. Berikut ini yang merupakan korespondensi satu-satu adalah ....
   a. {(*a*, 1), (*b*, 1), (*c*, 1)}
   b. {(1, *a*), (2, *c*), (3, *d*)}
   c. {(1, *b*), (2, *c*), (3, *b*)}
   d. {(*a*, *b*), (*c*, *d*), (*b*, *d*)}

8. Grafik fungsi ditunjukkan oleh gambar ....

   a.

   b.

   c.

   d.

9. Pada fungsi linear $f(x) = ax + b$ dengan $f(1) = 0$ dan $f(0) = -2$, rumus fungsi $f(x) = ...$
   a. $x - 4$
   b. $2x - 2$
   c. $x + 3$
   d. $2x + 5$

10. Jika $f(x) = ax + b$ maka nilai perubahan fungsi $f(x) - f(x + 1) = ...$
    a. 0
    b. 1
    c. a
    d. $-a$

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

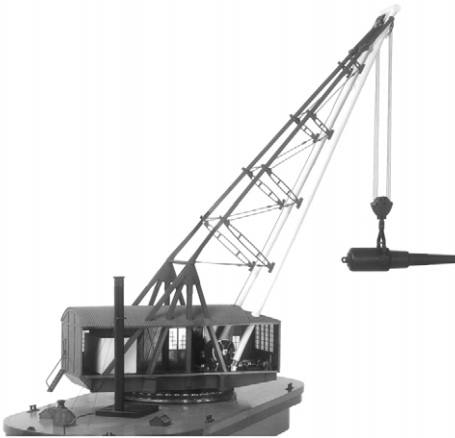
1. Diketahui P adalah himpunan bilangan genap kurang dari 100 dan A adalah himpunan bilangan asli. Relasi dari P ke A ditentukan oleh $f : x \mapsto x^2$.
   a. Nyatakan relasi itu dengan himpunan pasangan berurutan.
   b. Apakah relasi itu merupakan suatu pemetaan? Jelaskan.
   c. Sebutkan daerah asalnya.
   d. Sebutkan daerah kawannya.
   e. Sebutkan daerah hasilnya.
   f. Tentukan nilai x yang memenuhi $f(x) = 64$.

2. a. Buatlah relasi antara himpunan hari Senin sampai dengan hari Sabtu ke himpunan jadwal mata pelajaran di kelasmu. Apakah relasi itu merupakan pemetaan? Mengapa?
   b. Buatlah relasi dari himpunan jadwal mata pelajaran di kelasmu ke himpunan hari Senin sampai dengan Sabtu. Apakah relasi itu merupakan pemetaan? Mengapa?

3. Diketahui
   K = himpunan warna lampu lalu lintas.
   L = himpunan titik sudut segitiga ABC.
   a. Gambarlah diagram panah yang menunjukkan korespondensi satu-satu dari himpunan K ke L.
   b. Berapa banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin terjadi?

4. Diketahui fungsi f dinyatakan dengan $f : x \mapsto 3x - 5$, untuk x bilangan real.
   a. Tentukan rumus fungsi yang paling sederhana dari $f(x + 2)$, $f(2x - 1)$, dan $f(-x + 5)$.
   b. Tentukan nilai a sehingga $f(a + 2) = f(2a - 1)$.

5. Diketahui f fungsi linear dengan $f(x) = ax + 1$ dan $f(6) = 4$. Tentukan
   a. bentuk fungsinya;
   b. nilai $f(-2)$;
   c. nilai $f(-2) + f(2)$;
   d. bentuk fungsi $f(2x - 1)$.

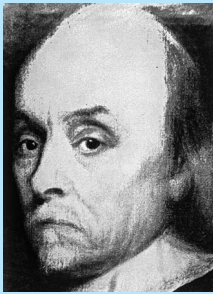
PERSAMAAN GARIS LURUS

Sumber: *Jendela Iptek,* 2001

Perhatikan gambar di samping. Gambar tersebut menunjukkan penampang sebuah derek yang dibangun pada tahun 1886 di Dermaga Tilburi dekat London. Derek tersebut terdiri dari pipa baja yang dihubungkan dengan kabel sebagai kerekan. Pipa baja bisa diibaratkan sebagai garis lurus. Dapatkah kalian menentukan nilai kemiringannya terhadap tanah mendatar? Apakah nilai kemiringan tersebut dapat dipandang sebagai gradien pada persamaan garis lurus?

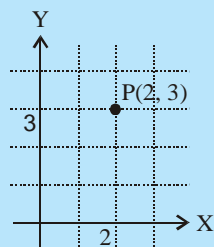
Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- dapat mengenal pengertian dan menentukan gradien garis lurus dalam berbagai bentuk;
- dapat menentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik, melalui satu titik dengan gradien tertentu;
- dapat menggambar grafik garis lurus.

Kata-Kata Kunci:

- gradien garis lurus
- persamaan garis lurus
- grafik garis lurus

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2003

Gambar 3.1 Rene Descartes

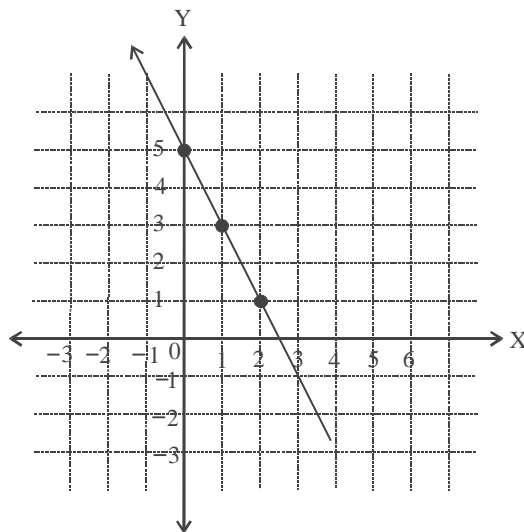
Sistem koordinat Cartesius pertama kali diperkenalkan oleh Rene Descartes bersama rekannya Piere de Fermet pada pertengahan abad ke-17. Sistem koordinat Cartesius terdiri atas garis mendatar, yaitu sumbu X dan garis tegak, yaitu sumbu Y. Letak suatu titik pada koordinat Cartesius diwakili oleh pasangan titik (x, y), dengan x absis dan y ordinat.

Pada gambar di atas, tampak bahwa koordinat titik P(2, 3) dengan absis = 2 dan ordinat = 3.

Pada pembahasan sebelumnya kalian telah mempelajari secara singkat mengenai fungsi linear $f(x) = ax + b$ dan grafiknya pada bidang Cartesius. Grafik fungsi linear $f(x) = ax + b$ berupa garis lurus jika x anggota bilangan real. Sekarang akan kalian pelajari secara lebih mendalam mengenai garis lurus, bagaimana persamaannya, cara menggambar grafik, gradien, dan bentuk-bentuk persamaan garis tersebut.

Agar kalian mudah mempelajarinya, kalian harus menguasai materi sistem koordinat Cartesius, persamaan linear satu variabel, dan kedudukan dua garis.

A. PERSAMAAN GARIS (1)

Sebelum kita membahas lebih mendalam mengenai persamaan garis lurus, coba kalian ingat kembali pengertian persamaan linear satu variabel.

Perhatikan garis lurus pada Gambar 3.2 berikut. Kemudian salin dan lengkapilah tabel pasangan nilai x dan y dari titik-titik yang terletak pada garis itu.

x	y
⋮	
0	
1	
2	
3	
⋮	⋮

Gambar 3.2

Pada Gambar 3.2 hubungan nilai x dan nilai y yang terletak pada garis lurus adalah $y = –2x + 5$. Coba kamu buat garis yang lain dan tentukan hubungan nilai x dan nilai y. Secara umum, hubungan nilai x dan nilai y yang terletak pada garis lurus dapat ditulis $px + qy = r$ dengan p, q, r, bilangan real dan $p, q \neq 0$. Persamaan $y = –2x + 5$ disebut *persamaan garis lurus* atau sering

disebut *persamaan garis*, karena persamaan garis tersebut dapat disajikan sebagai suatu garis lurus dengan x, y variabel pada himpunan bilangan tertentu.

Persamaan dalam bentuk $px + qy = r$ dengan $p, q \neq 0$ dapat ditulis menjadi $y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$. Jika $\frac{-p}{q}$ dinyatakan dengan m dan $\frac{r}{q}$ dinyatakan dengan c maka persamaan garis tersebut dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut.

$y = mx + c$; dengan m, c adalah suatu konstanta

1. Menggambar Grafik Persamaan Garis Lurus $y = mx + c$ pada Bidang Cartesius

Telah kalian ketahui bahwa melalui dua buah titik dapat ditarik tepat sebuah garis lurus. Dengan demikian, untuk menggambar grafik garis lurus pada bidang Cartesius dapat dilakukan dengan syarat minimal terdapat dua titik yang memenuhi garis tersebut, kemudian menarik garis lurus yang melalui kedua titik itu.

(Berpikir kritis)

Perhatikan kembali persamaan $y = -2x + 5$ pada Gambar 3.2.

a. Bandingkan dengan bentuk $y = mx + c$. Dapatkah kalian menentukan nilai m dan c?
b. Kemudian, bandingkan kembali dengan bentuk $y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q}$. Berapakah nilai p, q, dan r?
c. Apa yang dapat kalian simpulkan dari jawaban a dan b?

Gambarlah grafik persamaan garis lurus $2x + 3y = 6$ pada bidang Cartesius, jika x, y variabel pada himpunan bilangan real.

Penyelesaian:

Langkah-langkah menggambar grafik persamaan garis lurus $y = mx + c$, $c \neq 0$ sebagai berikut.

– Tentukan dua pasangan titik yang memenuhi persamaan garis tersebut dengan membuat tabel untuk mencari koordinatnya.
– Gambar dua titik tersebut pada bidang Cartesius.
– Hubungkan dua titik tersebut, sehingga membentuk garis lurus yang merupakan grafik persamaan yang dicari.

x	0	3
y	2	0
(x, y)	(0, 2)	(0, 3)

untuk $x = 0$ maka $2 \times 0 + 3y = 6$

$0 + 3y = 6$

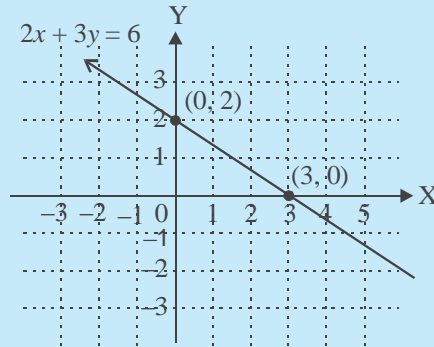
$3y = 6$

$y = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow (x, y) = (0, 2)$.

untuk $y = 0$ maka $2x + 3 \times 0 = 6$

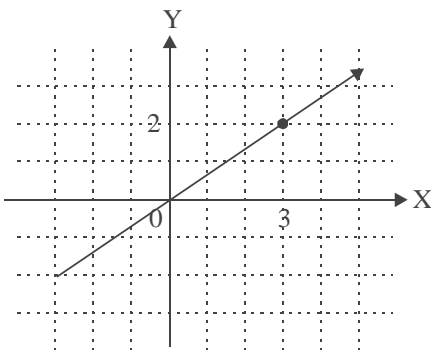
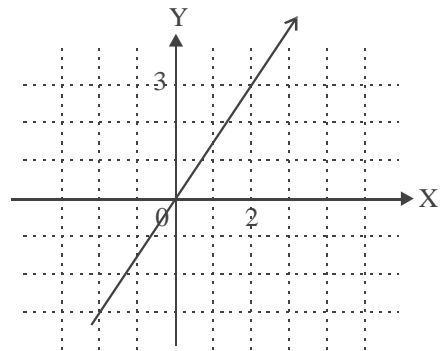
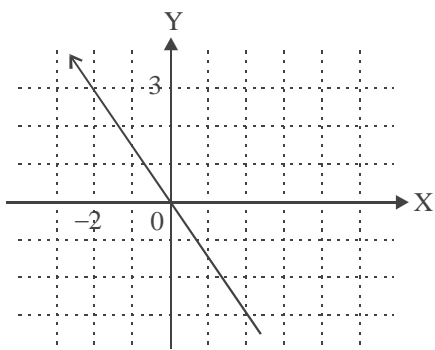
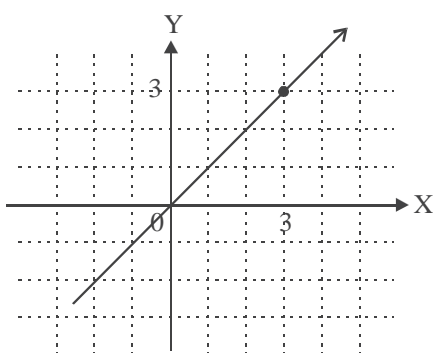
$$2x + 0 = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3 \longrightarrow (x, y) = (3, 0).$$

Gambar 3.3

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Di antara gambar-gambar berikut, manakah yang menunjukkan garis dengan persamaan $y = \frac{3}{2}x$?

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

2. Salin dan lengkapilah tabel berikut sesuai dengan persamaan garis yang diberikan. Kemudian, gambarlah grafik persamaan garis lurus tersebut pada bidang Cartesius.

   a. $y = 5x$

x	0	....
y	....	5
(x, y)	(..., ...)	(..., ...)

   b. $y = \frac{1}{3}x - 1$

x	0	....
y	....	0
(x, y)	(..., ...)	(..., ...)

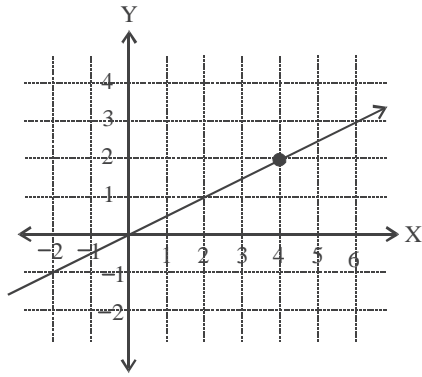
3. Gambarlah grafik persamaan garis lurus berikut pada bidang Cartesius.
   a. $y = 4x - 1$
   b. $2x - 3y = 12$
   c. $x = 2y - 2$
   d. $y = 4$
   e. $x = -1$
   f. $y = x$

4. a. Gambarlah grafik dari $y = 2x$, $y = 2x + 3$, dan $y = 2x - 2$ pada satu bidang koordinat.
   b. Adakah hubungan antara ketiga garis tersebut?
   c. Bagaimanakah koefisien x pada ketiga garis tersebut?
   d. Apa yang dapat kalian simpulkan?

5. Gambarlah grafik dari $y = -\frac{1}{2}x$ dan $y = 2x + 1$ pada satu bidang koordinat.
   a. Adakah hubungan antara ketiga garis tersebut?
   b. Bagaimanakah koefisien x pada ketiga garis tersebut?
   c. Apa yang dapat kalian simpulkan?

2. Menyatakan Persamaan Garis Jika Grafiknya Diketahui

a. *Persamaan garis $y = mx$*

Untuk menyatakan persamaan garis dari gambar yang diketahui maka kita harus mencari hubungan absis (x) dan ordinat (y) yang dilalui garis tersebut.

Gambar 3.4

Perhatikan Gambar 3.4. Misalkan bentuk persamaan garis tersebut adalah $y = mx + c$ dengan m dan c konstanta. Karena titik (0, 0) dan (4, 2) terletak pada garis tersebut maka diperoleh

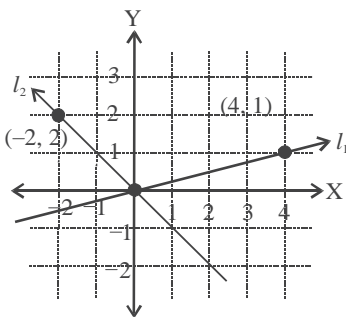
$y = mx + c$

$0 = m(0) + c$ atau $c = 0$, sehingga

$2 = m(4) + 0$ atau $m = \frac{1}{2}$.

Jadi, persamaan garis tersebut adalah $y = mx + c$ atau $y = \frac{1}{2}x$.

Persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik P(x_1, y_1) adalah $y = \frac{y_1}{x_1}x$. Jika $\frac{y_1}{x_1} = m$ maka persamaan garisnya adalah $y = mx$.

Tentukan persamaan garis lurus pada gambar berikut.

Gambar 3.5

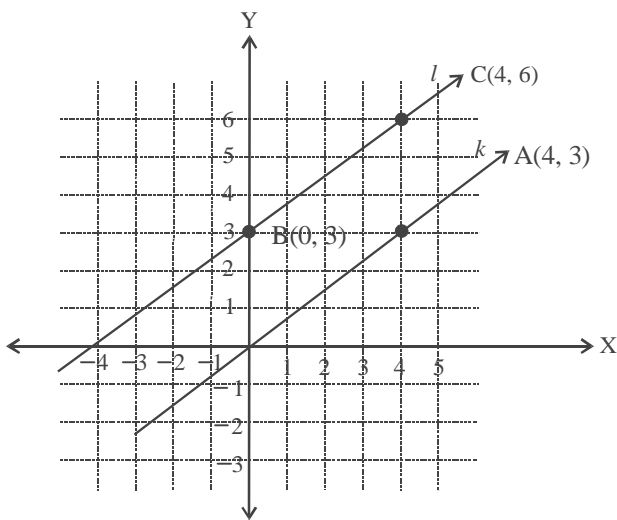
Penyelesaian:

Garis l_1 melalui titik (0, 0) dan (4, 1), sehingga persamaan garisnya adalah $y = \frac{y_1}{x_1}x = \frac{1}{4}x$. Adapun garis l_2 melalui titik (0, 0) dan (–2, 2), sehingga persamaan garisnya adalah

$y = \frac{y_1}{x_1}x = \frac{2}{-2}x$ atau $y = -x$.

b. Persamaan garis $y = mx + c$

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mempelajari bahwa persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan $P(x_1, y_1)$ adalah $y = \frac{y_1}{x_1}x$.

Sekarang, perhatikan Gambar 3.6. Pada gambar tersebut garis k melalui titik O(0, 0) dan titik A(4, 3), sehingga persamaan garis k adalah $y = mx$ atau $y = \frac{3}{4}x$. Sekarang, coba geserlah garis k sampai berimpit dengan garis l sehingga $(0, 0) \rightarrow (0, 3)$ dan $(4, 3) \rightarrow (4, 6)$. Garis l melalui titik B(0, 3) dan C(4, 6) sejajar garis k.

Gambar 3.6

Misalkan persamaan garis l adalah $y = mx + c$.

Karena garis l melalui titik (0,3) maka berlaku

$3 = m(0) + c$

$3 = c$ atau $c = 3$

Karena garis l melalui titik (4, 6) maka berlaku

$6 = m(4) + c$

$6 = 4m + 3$

$4m = 3$

$m = \frac{3}{4}$

Jadi, persamaan garis l yang sejajar dengan garis k adalah $y = mx + c$ atau $y = \frac{3}{4}x + 3$.

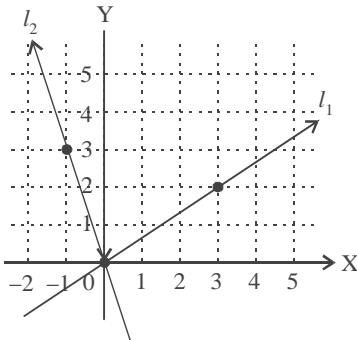
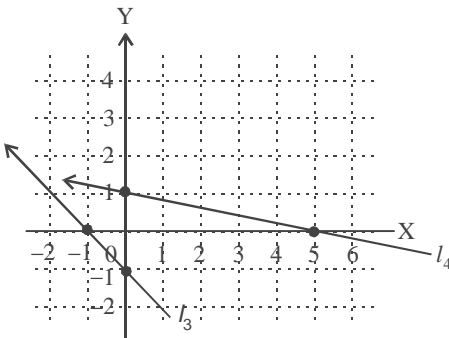
Dengan demikian, kita dapat menentukan persamaan suatu garis l dengan memerhatikan berikut ini.

1. Titik potong garis l dengan sumbu Y.
2. Persamaan garis yang sejajar dengan garis l dan melalui titik (0, 0).

> Persamaan garis yang melalui titik (0, c) dan sejajar garis $y = mx$ adalah $y = mx + c$.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan persamaan garis pada gambar berikut.

(i)

(ii)

2. Gambarlah garis yang melalui titik pangkal koordinat O(0, 0) dan titik-titik berikut, kemudian tentukan persamaan garisnya.
   a. (3, 4)
   b. (–2, 5)
   c. (–3, –5)
   d. (4, –3)
3. a. Diketahui titik A(–8, a) terletak pada garis yang persamaannya
   $$y = -\frac{1}{4}x + 15.$$
   Tentukan nilai a.
   b. Diketahui titik B(b, 5) terletak pada garis yang persamaannya $4x - 3y + 7 = 0$. Tentukan nilai b.
4. Gambarlah garis yang melalui titik-titik berikut, kemudian tentukan persamaan dari masing-masing garis tersebut.
   a. P(0, 2) dan Q(2, 0)
   b. R(0, 3) dan S(-4, 0)
   c. K(0, 4) dan L(-1, 0)

B. GRADIEN

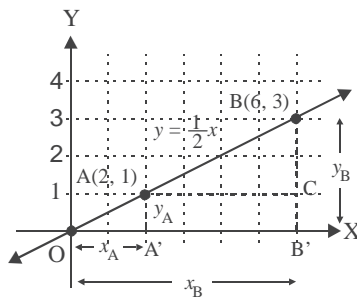
Coba kalian perhatikan orang yang sedang naik tangga. Dapatkah kalian menentukan nilai kemiringannya? Jika tangga dianggap sebagai garis lurus maka nilai kemiringan tangga dapat ditentukan dengan cara membandingkan tinggi tembok yang dapat dicapai ujung tangga dengan jarak kaki tangga dari tembok. Nilai kemiringan tangga tersebut disebut *gradien*. Pada pembahasan ini kita akan membahas cara menentukan gradien dari suatu garis lurus.

Sumber: *Dok. Penerbit*

Gambar 3.7

1. Gradien Suatu Garis yang Melalui Titik Pusat O(0, 0) dan Titik (*x*, *y*)

Agar kalian memahami pengertian dan cara menentukan gradien suatu garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik (*x*, *y*), perhatikan Gambar 3.8.

Pada Gambar 3.8 tersebut tampak garis $y = \frac{1}{2}x$ dengan titik O(0, 0), A(2, 1), dan B(6, 3) terletak pada garis tersebut. Bagaimanakah perbandingan antara komponen y dan komponen x dari masing-masing ruas garis pada garis $y = \frac{1}{2}x$ tersebut?

Gambar 3.8

Perhatikan ruas garis OA pada segitiga OAA′.

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan ruas garis OB pada segitiga OBB′.

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan juga ruas garis AB pada segitiga ABC.

$$\frac{y_{AB}}{x_{AB}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

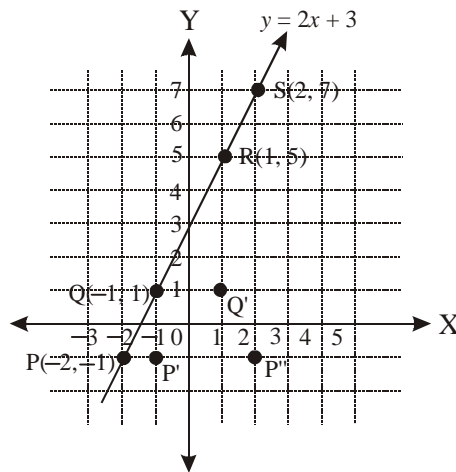
Dari uraian di atas ternyata perbandingan antara komponen *y* dan komponen *x* pada masing-masing ruas garis menunjukkan bilangan yang sama. Bilangan yang sama tersebut disebut *gradien*.

Jadi, gradien dari garis $y = \frac{1}{2}x$ adalah $\frac{1}{2}$. Bandingkan dengan koefisien *x* pada persamaan garis $y = \frac{1}{2}x$. Apakah kalian menyimpulkan berikut ini?

> *Gradien* suatu garis adalah bilangan yang menyatakan *kecondongan* suatu garis yang merupakan *perbandingan* antara komponen *y* dan komponen *x*.

Besar gradien garis yang persamaannya $y = mx$ adalah besarnya koefisien *x*, sehingga dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Garis dengan persamaan $y = mx$ memiliki gradien *m*.

Bagaimana cara menentukan gradien garis yang persamaannya $y = mx + c$? Agar kalian mudah memahaminya, perhatikan Gambar 3.9.

Gambar 3.9

Pada gambar tersebut tampak bahwa garis yang memiliki persamaan $y = 2x + 3$ melalui titik-titik P(–2, –1), Q(–1, 1), R(1, 5), dan S(2, 7).

Sekarang perhatikan perbandingan antara komponen *y* dan komponen *x* dari beberapa ruas garis $y = 2x + 3$.

Perhatikan ruas garis PQ pada segitiga $PP'Q$.

$$\frac{y_p}{x_p} = \frac{QP'}{PP'} = \frac{2}{1} = 2$$

Perhatikan ruas garis QR pada segitiga $QQ'R$.

$$\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{RQ'}{QQ'} = \frac{4}{2} = 2$$

Perhatikan ruas garis PS pada segitiga $PP''S$.

$$\frac{y_S}{x_S} = \frac{SP''}{PP''} = \frac{8}{4} = 2$$

Berdasarkan uraian di atas ternyata perbandingan antara komponen y dan komponen x pada masing-masing ruas garis menunjukkan bilangan yang selalu sama. Bilangan yang selalu sama tersebut disebut *gradien*. Jadi, garis dengan persamaan $y = 2x + 3$ memiliki gradien 2.

> Garis dengan persamaan $y = mx + c$ memiliki gradien m.

Selanjutnya, bagaimana menentukan gradien garis yang berbentuk $ax + by = c$?

Sebelumnya ubahlah bentuk $ax + by = c$ ke bentuk $y = mx + c$ dengan cara seperti berikut.

$$\Leftrightarrow ax + by = c$$

$$\Leftrightarrow by = -ax + c$$

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right) x + \frac{c}{b}$$

↓

koefisien x menunjukkan gradien

Gradien garis $ax + by = c$ adalah $-\frac{a}{b}$.

> Gradien garis dengan persamaan $ax + by = c$ adalah $-\frac{a}{b}$.

(Berpikir kritis)

Kalian telah mempelajari bahwa gradien garis dengan persamaan $ax + by = c$ adalah $-\frac{a}{b}$.

a. Bagaimana jika $a = 0$? Berapakah gradiennya?
b. Bagaimana pula jika $b = 0$? Berapakah gradiennya?

Diskusikan dengan temanmu. Ujilah jawabanmu dengan uraian materi selanjutnya.

Tentukan gradien dari persamaan garis berikut.

a. $2y = 5x - 1$

b. $3x - 4y = 10$

Penyelesaian:

a. Ubah persamaan garis $2y = 5x - 1$ ke bentuk $y = mx + c$.

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{5}{2}$$

Atau dengan cara lain, ubah persamaan garis $2y = 5x - 1$ ke bentuk $ax + by = c$.

$$2y = 5x - 1 \Leftrightarrow 5x - 1 = 2y$$
$$\Leftrightarrow 5x - 2y = 1$$

Gradien garis $5x - 2y = 1$ adalah

$$m = -\frac{a}{b} = -\left(\frac{5}{-2}\right) = \frac{5}{2}.$$

b. $3x - 4y = 10$

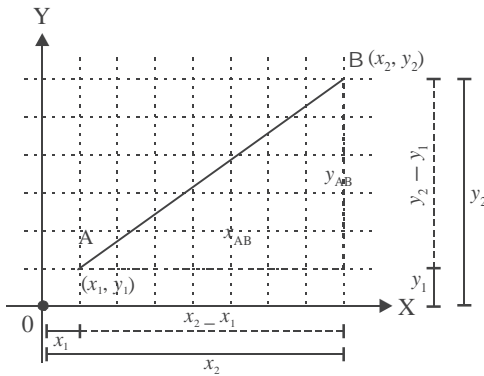
$$m = -\frac{a}{b}$$

$$= -\left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{3}{4}$$

Jadi, gradien garis $3x - 4y = 10$ adalah $m = \frac{3}{4}$.

2. Gradien Garis yang Melalui Dua Titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Kalian telah mempelajari bahwa gradien suatu garis adalah perbandingan antara komponen y dan komponen x ruas garis yang terletak pada garis tersebut.

Perhatikan ruas garis AB pada Gambar 3.10.

Gambar 3.10

Berdasarkan gambar tersebut tampak bahwa ruas garis AB melalui titik A (x_1, y_1) dan B(x_2, y_2), sehingga perbandingan komponen y dan komponen x ruas garis tersebut adalah

$$\frac{y_{AB}}{x_{AB}} = m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Gradien garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Catatan:

Selisih antara dua bilangan x_1 dan x_2 dinotasikan dengan

$\Delta x = x_2 - x_1$ (Δ dibaca: *delta*).

(Berpikir kritis)

Apakah gradien garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dapat dirumuskan sebagai

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}?$$

Apakah ada syarat tertentu agar hal tersebut berlaku?

Eksplorasilah hal ini dengan mendiskusikan bersama teman sebangkumu.

Hasilnya, kemukakan secara singkat di depan kelas.

Tentukan gradien garis yang melalui titik

a. A(1, 2) dan B(3, 0);

b. C(–3, 1) dan D(–2, –5).

Penyelesaian:

a. Gradien garis yang melalui titik A(1, 2) dan B(3, 0) adalah

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b. Gradien garis yang melalui titik C(–3, 1) dan D(–2, –5) adalah

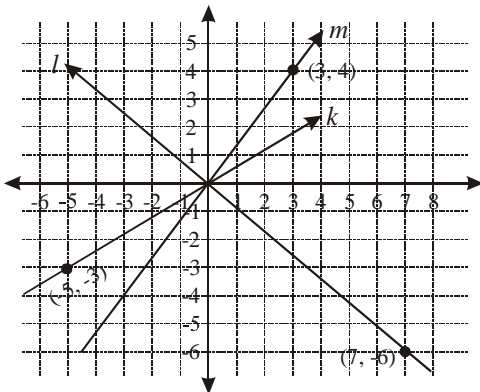
$$\begin{aligned} m_{CD} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \\ &= \frac{-5-1}{-2-(-3)} \\ &= \frac{-6}{1} \\ &= -6 \end{aligned}$$

Uji Kompetensi 3

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Gambarlah garis yang melalui titik pangkal koordinat O(0, 0) dan titik berikut pada bidang koordinat Cartesius. Kemudian, tentukan gradien dari masing-masing garis tersebut.
   a. A(1, 7)
   b. B(5, 3)
   c. C(–2, 4)
   d. D(3, –5)
   e. E(5, 0)
   f. F(0, 3)
2. Perhatikan gambar berikut. Pada gambar tersebut garis *k* melalui titik (0, 0) dan (–5, –3), garis *l* melalui titik (0, 0) dan (7, –6), serta garis *m* melalui titik (0, 0) dan (3, 4). Tentukan gradien dari masing-masing garis tersebut.

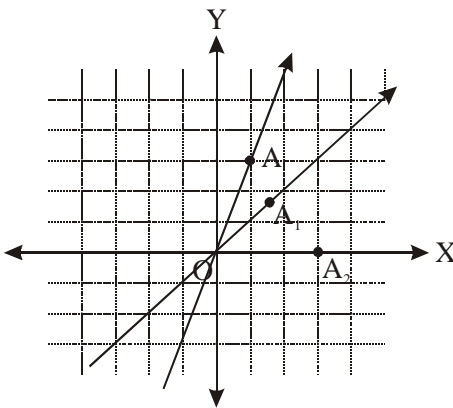
3. Tentukan gradien garis berikut.
   a. $y = x$
   b. $y = -2x - 3$
   c. $y = 3x - 1$
   d. $y = \frac{1}{2}x$
   e. $x + 2y - 1 = 0$
   f. $-3x + 5y = 0$
4. Gambarlah garis yang melalui kedua titik berikut pada bidang koordinat Cartesius.
   a. A(1, 2) dan B(–2, 3)
   b. C(7, 0) dan D(–1, 5)
   c. E(1, 1) dan F(–3, –4)
   d. G(5, 0) dan H(0, 4)
   e. I(2, 0) dan J(0, –4)

   Kemudian, tentukan gradien dari masing-masing garis tersebut.
5. Diketahui persamaan garis $y = mx + c$. Tentukan nilai *m* dan *c* jika garis tersebut melalui titik
   a. (2, 1) dan (–3, –1);
   b. (2, 0) dan (0, –4);
   c. (–4, 2) dan (3, –3);
   d. (0, 2) dan (5, 0).

3. Mengenal Gradien Garis Tertentu

a. *Gradien garis yang sejajar sumbu* X *dan gradien garis yang sejajar sumbu* Y

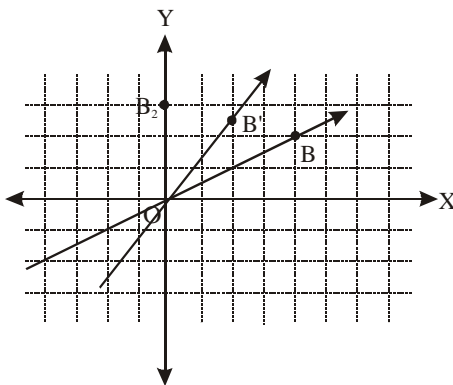
Perhatikan Gambar 3.11. Jika garis OA kita putar searah jarum jam sehingga berimpit dengan sumbu X maka diperoleh garis OA_2. Titik-titik yang terletak pada garis OA_2 memiliki ordinat 0, sehingga gradien garis $OA_2 = \dfrac{\text{komponen } y}{OA_2}$

$$= \frac{0}{OA_2} = 0$$

Gradien garis yang sejajar sumbu X adalah nol.

Gambar 3.11

Selanjutnya, kita akan menentukan gradien dari garis yang sejajar sumbu Y. Perhatikan Gambar 3.12. Jika garis OB kita putar berlawanan arah jarum jam sehingga berimpit dengan sumbu Y maka diperoleh garis OB_2. Titik-titik yang terletak pada garis OB_2 memiliki absis 0, sehingga

Gambar 3.12

$$OB = \frac{OB_2}{\text{komponen } x}$$

$$= \frac{B_2}{0} \text{(tidak didefinisikan)}$$

Gradien garis yang sejajar sumbu Y tidak didefinisikan.

(Berpikir kritis)

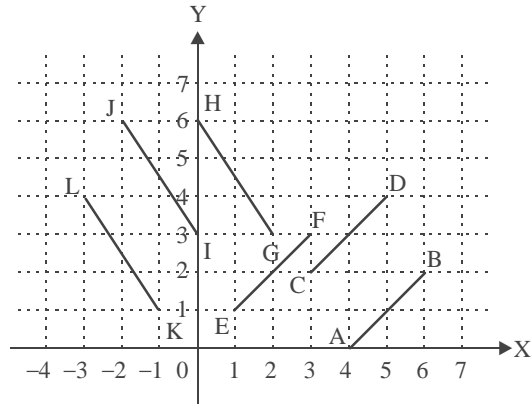
Diskusikan dengan temanmu.

Segitiga PQR samakaki dengan PQ = PR = 3. Sisi PR terletak pada sumbu X dan PQ pada sumbu Y dengan P terletak pada titik pusat koordinat. Tentukan

a. koordinat Q dan R;
b. gradien garis PQ, dan PR;
c. persamaan garis PQ dan PR.

b. *Gradien garis-garis yang saling sejajar*

Perhatikan Gambar 3.13.

Pada gambar tersebut tampak pasangan ruas garis sejajar AB//CD//EF dan ruas garis GH//IJ//KL. Bagaimanakah gradien ruas garis yang saling sejajar tersebut?

Gambar 3.13

Perhatikan uraian berikut ini.

•) Ruas garis AB melalui titik A(4, 0) dan B(6, 2), sehingga gradien ruas garis AB adalah

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{2-0}{6-4}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1.$$

•) Ruas garis CD melalui titik C(3, 2) dan D(5, 4), sehingga gradien ruas garis CD adalah

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

$$= \frac{4-2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1.$$

•) Ruas garis EF melalui titik E(1, 1) dan F(3, 3), sehingga gradien ruas garis EF adalah

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$$

$$= \frac{3-1}{3-1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Berdasarkan uraian di atas tampak bahwa $m_{AB} = m_{CD} = m_{EF} = 1$, dengan garis AB//CD//EF.

Sekarang kita akan mencari gradien dari garis GH, garis IJ, dan garis KL.

•) Ruas garis GH melalui titik G(2, 3) dan H(0, 6), sehingga berlaku

$$m_{GH} = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \frac{6-3}{0-2} = -\frac{3}{2}.$$

•) Ruas garis IJ melalui titik I(0, 3) dan J(–2, 6), sehingga berlaku

$$m_{IJ} = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{6-3}{-2-0} = -\frac{3}{2}.$$

•) Ruas garis KL melalui titik K(–1, 1) dan L(–3, 4), sehingga berlaku

$$m_{KL} = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{4-1}{-3-(-1)} = -\frac{3}{2}.$$

Berdasarkan uraian tersebut, tampak bahwa $m_{GH} = m_{IJ} = m_{KL} = -\frac{3}{2}$, dengan garis GH//IJ//KL.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa garis-garis yang sejajar memiliki gradien yang sama.

Jika garis $y_1 = m_1x + c$ sejajar dengan garis $y_2 = m_2x + c$ maka gradien kedua garis tersebut sama, atau $m_1 = m_2$.

Tentukan kedudukan garis $y = -2x + 5$ dengan garis berikut.

(i) $x + \frac{1}{2}y = 2$

(ii) $4x + 2y = 5$

Penyelesaian:

Garis $y = -2x + 5$ berbentuk $y = mx + c$, sehingga gradien garis tersebut adalah $m_1 = -2$.

(i) Ubahlah bentuk $x + \frac{1}{2}y = 2$ menjadi bentuk $y = mx + c$.

$$x + \frac{1}{2}y = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = 2 - x$$
$$\Leftrightarrow y = 4 - 2x$$

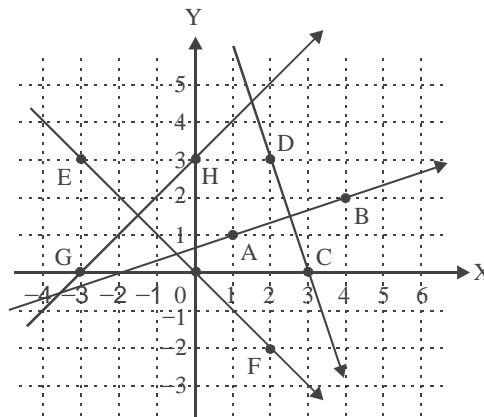
Gradien dari persamaan garis $y = 4 - 2x$ adalah $m_2 = -2$.
Karena $m_2 = m_1 = -2$, maka garis $y = 2x + 5$ dan garis $x + \frac{1}{2}y = 2$ saling sejajar.

(ii) Bentuk $4x + 2y = 5$ jika diubah ke bentuk $y = mx + c$ sebagai berikut.

$$4x + 2y = 5 \Leftrightarrow 2y = 5 - 4x$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{2} - 2x$$

Gradien dari garis $y = \frac{5}{2} - 2x$ adalah $m_2 = -2$. Karena $m_2 = m_1$, maka garis $y = 2x + 5$ dan garis $4x + 2y = 5$ saling sejajar.

c. Gradien garis yang saling tegak lurus

Untuk menentukan gradien garis yang saling tegak lurus perhatikan Gambar 3.14. Dengan menggunakan busur derajat atau penggaris siku-siku, dapatkah kalian menunjukkan hubungan antara ruas garis AB dengan ruas garis CD? Bagaimana pula hubungan antara ruas garis EF dengan ruas garis GH? Apakah kedua pasang ruas garis tersebut saling tegak lurus? Jika kalian menggunakan penggaris siku-siku dengan cermat, kalian akan memperoleh bahwa ruas garis AB $\perp$ CD dan ruas garis EF $\perp$ GH.

Gambar 3.14

Sekarang akan kita selidiki gradien dari masing-masing ruas garis tersebut.

•) Ruas garis AB melalui titik A(1, 1) dan B(4, 2), sehingga

$$m_{AB} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

•) Ruas garis CD melalui titik C(3, 0) dan D(2, 3), sehingga

$$m_{CD} = \frac{3-0}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Perhatikan bahwa $m_{AB} \times m_{CD} = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$.

Dari Gambar 3.15 tampak bahwa garis AB ⊥ CD dengan $m_{AB} \times m_{CD} = -1$ .... (i)

Selanjutnya akan kita cari gradien dari ruas garis EF dan GH.

•) Ruas garis EF melalui titik E(–3, 3) dan F(2, –2), sehingga

$$m_{EF} = \frac{-2-3}{2-(-3)} = \frac{-5}{5} = -1.$$

•) Ruas garis GH melalui titik G(–3, 0) dan H(0, 3), sehingga

$$m_{GH} = \frac{3-0}{0-(-3)} = \frac{3}{3} = 1.$$

Perhatikan bahwa $m_{EF} \times m_{GH} = -1 \times 1 = -1$.

Dari Gambar 3.14 tampak bahwa garis EF ⊥ GH dengan $m_{EF} \times m_{GH} = -1$ .... (ii)

Berdasarkan (i) dan (ii) dapat dikatakan bahwa jika dua buah garis saling tegak lurus maka hasil kali gradien kedua garis tersebut adalah –1.

Hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah –1.

Diskusi

(Menumbuhkan inovasi)

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 4 orang, 2 pria dan 2 wanita. Diskusikan hal berikut.

a. Diketahui persamaan garis $ax + by = c$ dan $px + qy = r$ saling sejajar. Bagaimana hubungan antara a dan b dengan p dan q?

b. Diketahui persamaan garis $ax + by = c$ dan $px + qy = r$ saling tegak lurus. Bagaimana hubungan antara a dan b dengan p dan q?

Dari jawaban *a* dan *b*, buatlah kesimpulannya.

Selidikilah apakah garis yang melalui titik P(3, 1) dan Q(9, 5) tegak lurus dengan garis yang melalui titik R(8, 0) dan S(4, 6).

Penyelesaian:

Gradien garis yang melalui titik P(3, 1) dan Q(9, 5) adalah

$$m_{PQ} = \frac{5-1}{9-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Gradien garis yang melalui titik R(8, 0) dan S(4, 6) adalah

$$m_{RS} = \frac{6-0}{4-8} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

$$m_{PQ} \times m_{RS} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Karena hasil kali gradien kedua garis adalah –1, sehingga kedua garis tegak lurus.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan gradien dari garis-garis berikut.
   a. $x = 0$
   b. $x = 3$
   c. $x = -5$
   d. $y = -4$
   e. $y = 0$
   f. $y = 6$
2. Di antara persamaan garis berikut, manakah yang sejajar dengan garis yang melalui titik (0, 0) dan (–2, 1)?
   a. $y = 2x - 5$
   b. $y = -\frac{1}{2}x$
   c. $x + 2y = 1$
   d. $2x - y = 3$
   e. $4x + y - 1 = 0$
3. Tentukan gradien garis $y = mx + c$, agar
   a. sejajar dengan garis $2x - 3y = 10$;
   b. tegak lurus dengan garis $3x + 4y = 5$.
4. Tentukan gradien garis yang melalui kedua titik berikut. Adakah hubungan sejajar atau tegak lurus di antaranya?
   a. A(-1, 0) dan B(0, 2)
   b. C(0, 3) dan D(2, 2)
   c. E(1, -2) dan F(3, 2)
   d. G(2, –3) dan H(–6, 1)
5. Diketahui sebuah garis melalui titik A(3, 0) dan B(0, 2). Suatu garis lain melalui titik O(0, 0) dan C(3, 3).
   a. Dengan menentukan gradien masing-masing garis, bagaimanakah kedudukan dua garis tersebut?
   b. Tentukan persamaan garis yang melalui titik O dan C?

C. PERSAMAAN GARIS (2)

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari cara menentukan persamaan garis $y = mx$ dan $y = mx + c$ jika grafiknya diketahui. Pada bagian ini kalian akan mempelajari secara lebih mendalam mengenai cara menentukan persamaan garis jika grafiknya tidak diketahui. Pelajari uraian berikut ini.

1. Persamaan Garis yang Melalui Sebuah Titik (x_1, y_1) dengan Gradien m

Misalkan suatu garis mempunyai gradien m dan melalui sebuah titik (x_1, y_1). Bentuk persamaan garis tersebut adalah $y = mx + c$. Untuk menentukan persamaan garis tersebut perhatikan langkah-langkah berikut.

(a) Substitusi titik (x_1, y_1) ke persamaan $y = mx + c$.

$$y = mx + c$$
$$\Leftrightarrow y_1 = mx_1 + c$$
$$\Leftrightarrow c = y_1 - mx_1$$

(b) Substitusi nilai c ke persamaan $y = mx + c$.

$$y = mx + c$$
$$\Leftrightarrow y = mx + y_1 - mx_1$$
$$\Leftrightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (–3, 2) dan tegak lurus dengan garis yang melalui titik (1, 3) dan (–1, 4). Gambarlah kedua garis tersebut pada satu bidang koordinat dan tentukan koordinat titik potongnya.

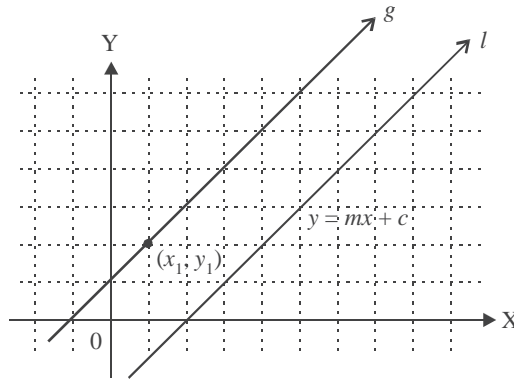
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, 5) dan bergradien $\frac{1}{2}$.

Penyelesaian:

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$. Oleh karena itu persamaan garis yang melalui titik (3, 5) dan bergradien $\frac{1}{2}$ sebagai berikut.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 5$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \text{atau}$$
$$2y = x + 7$$

2. Persamaan Garis yang Melalui titik (x_1, y_1) dan Sejajar dengan Garis $y = mx + c$

Perhatikan Gambar 3.15. Gambar tersebut menunjukkan garis l dengan persamaan $y = mx + c$ bergradien m dan garis g sejajar dengan l. Karena garis g // l maka $m_g = m_l = m$.

Gambar 3.15

Garis g melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m, sehingga persamaan garisnya adalah $y – y_1 = m(x – x_1)$.

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar garis $y = mx + c$ adalah $y – y_1 = m(x – x_1)$.

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2, –3) dan sejajar dengan garis $3x + 4y = 5$.

Penyelesaian:

Gradien garis $3x + 4y = 5$ adalah $m_1 = -\frac{3}{4}$. Karena garis yang melalui titik (2, –3) sejajar dengan garis $3x + 4y = 5$, maka gradiennya = $m_2 = -\frac{3}{4}$.

Persamaan garis yang melalui titik (2, –3) dan bergradien $-\frac{3}{4}$ adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow y + 3 = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

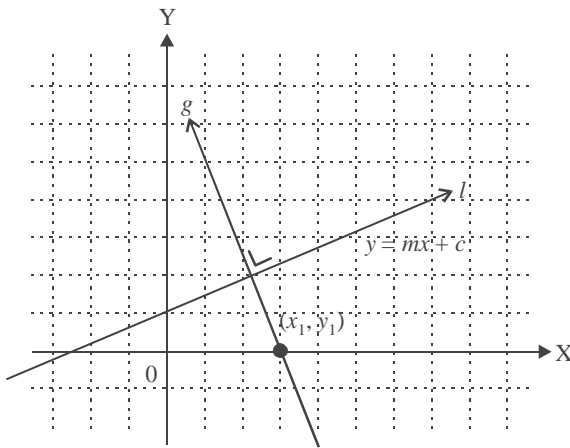
$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - 3$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \quad \text{atau}$$

$$4y = -3x - 6$$

3. Persamaan Garis yang Melalui (x_1, y_1) dan Tegak Lurus dengan Garis $y = mx + c$

Untuk menentukan persamaan garis g yang tegak lurus garis l, perhatikan Gambar 3.16. Pada gambar tersebut tampak bahwa garis l memiliki persamaan garis $y = mx + c$ dan bergradien m.

Garis $g \perp l$, sehingga $m_g \times m_l = -1$ atau $m_g = -\frac{1}{m_l} = -\frac{1}{m}$.

Gambar 3.16

Karena garis g melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien $-\frac{1}{m}$, maka persamaan garisnya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.

> Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan tegak lurus dengan garis $y = mx + c$ adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (–1, 3) dan tegak lurus garis $2x - 3y = 6$, kemudian gambar grafiknya pada bidang koordinat.

Penyelesaian:

Gradien garis $2x - 3y = 6$ adalah $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

Persamaan garis yang melalui (–1, 3) dan tegak lurus garis $2x - 3y = 6$ adalah

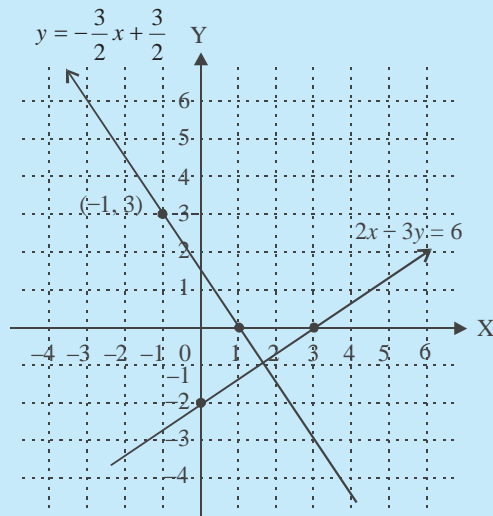
$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{\frac{2}{3}}(x - (-1))$$

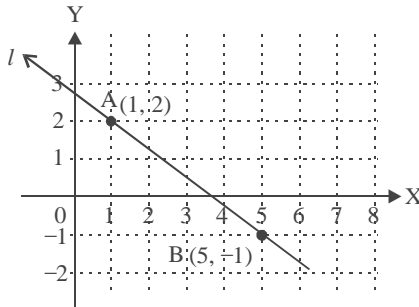
$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 3$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \text{ atau } 2y = -3x + 3$$

Gambar grafiknya sebagai berikut.

Gambar 3.17

4. Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik Sebarang (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Perhatikan Gambar 3.18.

Gambar 3.18

Misalkan kalian akan menentukan persamaan garis yang melalui titik A(1, 2) dan titik B(5, –1) seperti pada Gambar 3.18.

Coba kalian ingat kembali bentuk fungsi linear $y = ax + b$. Misalkan persamaan garis l adalah $y = ax + b$. Untuk menentukan persamaan garis l, perhatikan uraian berikut.

•) Substitusikan titik (1, 2) ke persamaan $y = ax + b$.

$2 = a(1) + b \Leftrightarrow 2 = a + b$ .... (i)

Selanjutnya, substitusikan titik (5, –1) ke persamaan $y = ax + b$.

$-1 = a(5) + b \Leftrightarrow -1 = 5a + b$ .... (ii)

Kemudian, eliminasi persamaan (i) dan (ii), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2 &= a + b \\ -1 &= 5a + b \quad - \\ \hline 2 - (-1) &= a - (5a) \\ 3 &= -4a \\ a &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai b substitusikan nilai $a = -\frac{3}{4}$ ke persamaan (i).

$$2 = a + b$$

$$2 = \left(-\frac{3}{4}\right) + b$$

$$b = 2 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}$$

(Menumbuhkan inovasi)

Bentuklah kelompok yang terdiri atas 2 orang, 1 pria dan 1 wanita. Coba diskusikan, bagaimanakah persamaan garis yang memotong sumbu Y di titik (0, *a*) dan memotong sumbu X di (*b*, 0)?
Kalian dapat menggunakan berbagai cara. Bandingkan hasilnya. Eksplorasilah, apakah dapat dikatakan bahwa persamaan garis yang melalui titik (0, *a*) dan (*b*, 0) adalah *ax* + *by* = *ab*?
Ujilah jawabanmu dengan persamaan tersebut.

$$y = ax + b$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$
$$4y = -3x + 11$$

Jadi, persamaan garis yang melalui titik A(1, 2) dan B(5, –1) adalah $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ atau $4y = -3x + 11$.

Dari contoh di atas tampak bahwa persamaan garis yang melalui dua titik dapat diselesaikan dengan substitusi ke fungsi linear $y = ax + b$.

Persamaan garis yang melalui dua titik dapat diselesaikan dengan substitusi ke fungsi linear $y = ax + b$.

Selain dengan cara substitusi ke fungsi linear, untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik dapat diselesaikan dengan cara seperti berikut.

Dari Gambar 3.18 diketahui garis *l* melalui titik A(1, 2) dan B(5, –1). Gradien garis yang melalui titik A dan B adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{-1 - 2}{5 - 1}$$
$$= -\frac{3}{4}$$

Persamaan garis *l* yang bergradien $m = -\frac{3}{4}$ dan melalui titik A(1, 2) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$
$$y - 2 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \text{ atau } 4y = -3x + 11$$

Dengan memerhatikan bahwa gradien yang melalui titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

maka persamaan garis yang melalui titik A dan B adalah

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Persamaan garis yang melalui titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) adalah

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

atau dapat dituliskan $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

(Menumbuhkan kreativitas)

Menurutmu, manakah yang lebih mudah cara menentukan persamaan garis yang melalui dua titik sebarang dengan substitusi ke fungsi linear $y = ax + b$, ataukah dengan rumus seperti di samping? Jelaskan pendapatmu.

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, –5) dan (–2, –3).

Penyelesaian:

Persamaan garis yang melalui titik (3, –5) dan (–2, –3) sebagai berikut.

Cara 1

Dengan substitusi ke fungsi linear $y = ax + b$.

$y = ax + b$

$-5 = a(3) + b \Leftrightarrow -5 = 3a + b$

$-3 = a(-2) + b \Leftrightarrow -3 = -2a + b$ —

$$\begin{aligned} -5 - (-3) &= 3a - (-2a) \\ -5 + 3 &= 3a + 2a \\ -2 &= 5a \\ -\frac{2}{5} &= a \end{aligned}$$

Substitusi nilai a ke persamaan

$$\begin{aligned} -5 &= 3a + b \\ -5 &= 3\left(-\frac{2}{5}\right) + b \\ -5 &= -\frac{6}{5} + b \\ b &= -\frac{19}{5} \end{aligned}$$

Persamaan garis yang memenuhi

$y = ax + b$ adalah $y = -\frac{2}{5}x - \frac{19}{5}$ atau $-5y = 2x + 19$.

Cara 2

Dengan menggunakan rumus.

Substitusi titik (3, –5) dan (–2, –3) ke persamaan

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-5)}{-3 - (-5)} = \frac{x - 3}{-2 - 3}$$

$$\frac{y + 5}{2} = \frac{x - 3}{-5}$$

$$-5(y + 5) = 2(x - 3)$$

$$-5y - 25 = 2x - 6$$

$$-5y = 2x - 6 + 25$$

$$-5y = 2x + 19$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{19}{5} \text{ atau}$$

$$-5y = 2x + 19$$

Jadi, persamaan garis yang melalui titik (3, –5) dan (–2, –3) adalah $y = -\frac{2}{5}x - \frac{19}{5}$ atau $-5y = 2x + 19$.

5. Menggambar Garis yang Melalui Titik (x_1, y_1) dengan Gradien *m*

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari cara menggambar grafik persamaan garis $y = mx + c$. Coba kalian ingat kembali bagaimana cara menggambarnya. Sekarang, kalian akan mempelajari cara menggambar garis yang belum diketahui persamaannya. Dalam hal ini, garis yang melalui titik (x_1, y_1) dengan gradien *m*. Agar kalian lebih mudah memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Gambarlah garis yang melalui titik P(2, 0) dengan gradien $-\frac{1}{2}$.

Penyelesaian:

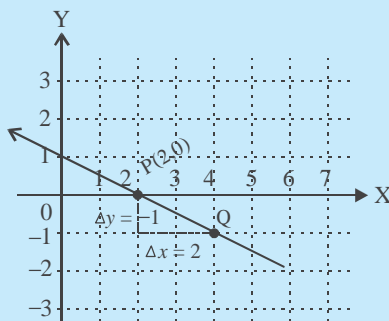
Untuk menggambar garis yang melalui titik P(2, 0) dan bergradien $-\frac{1}{2}$ langkah-langkahnya sebagai berikut.

– Gambar titik P(2, 0) pada bidang koordinat Cartesius.

– Karena gradien adalah perbandingan antara komponen y dan komponen x, maka $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2}$.

$\Delta y = -1$, artinya ke bawah 1 satuan dari titik P(2, 0) diteruskan dengan $\Delta x = 2$, artinya ke kanan 2 satuan, sehingga diperoleh titik Q(4, –1).

– Hubungkan titik P dan titik Q.

Garis yang melalui titik P(2, 0) dan Q(4, –1) adalah garis yang dimaksud.

Gambar 3.19

Uji Kompetensi 5

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik
   a. A(1, 3) dan bergradien 2;
   b. C(7, 1) dan bergradien $\frac{1}{5}$;
   c. D(3, 0) dan bergradien $-\frac{1}{2}$;
   d. E(–2, –3) dan bergradien –1.

   Kemudian, gambarlah garis tersebut pada bidang koordinat Cartesius. Berilah nama untuk masing-masing garis tersebut.
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik
   a. A(–2, 3) dan sejajar garis $y = -x - 5$;
   b. B(–4, 0) dan sejajar garis $2x + 3y = 1$;
   c. D(–3, 1) dan sejajar garis $x + 4y + 5 = 0$;
   d. E(2, 4) dan sejajar garis $x = 3y + 3$.
3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik berikut.
   a. A(3, –2) dan B(–1, 3)
   b. Q(–5, 0) dan R(3, 4)
   c. K(7, 3) dan L(–2, –1)
   d. M(1, 1) dan N(–6, 4)
4. Diketahui suatu garis bergradien 5 melalui titik P(1, 0) dan Q(x, 5). Tentukan nilai x.

5. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2, 5) dan tegak lurus dengan garis berikut.

   a. $2x + y + 5 = 0$

   b. $y = -\frac{1}{2}x + 6$

   c. $3x = -4y + 5$

   d. $\frac{3}{2}y - x = 4$

D. MENENTUKAN TITIK POTONG DUA GARIS

Kalian telah mempelajari cara menentukan persamaan garis yang saling sejajar maupun tegak lurus. Dua garis yang sejajar tidak akan pernah berpotongan di satu titik. Sebaliknya, dua garis yang saling tegak lurus pasti berpotongan di satu titik. Dengan tanpa menggambarnya terlebih dahulu, kalian dapat menentukan titik potong dua garis yang tidak sejajar. Pelajari uraian berikut.

(Menumbuhkan kreativitas)

Misalkan terdapat tiga buah garis g, h, dan k, serta dua titik A dan B. Garis g dengan persamaan $(a + 1)x - 2y = 3$ dan garis h dengan persamaan $x - ay = 0$. Titik A adalah titik potong garis g dan h, sedangkan garis k adalah garis yang melalui titik B(1, 5) dan sejajar garis g. Tentukan

a. gradien garis g, h, dan k;

b. nilai a, jika $g \perp h$;

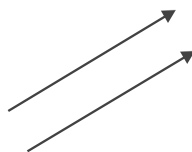
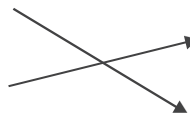
c. koordinat titik A;

d. persamaan garis k;

e. titik potong garis k dan h.

Gambarlah ketiga garis tersebut pada bidang koordinat Cartesius. Hasilnya, kumpulkan kepada gurumu.

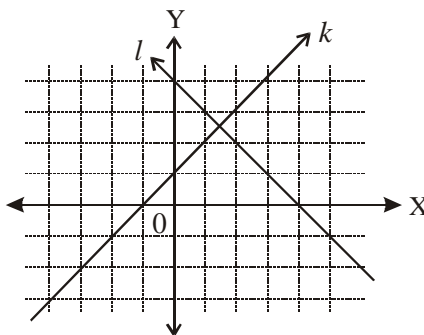
1. Kedudukan Dua Garis pada Bidang

Ada dua macam kedudukan dua garis pada bidang, yaitu sejajar dan berpotongan.

Dua garis sejajar

Dua garis berpotongan

Gambar 3.20

Dua garis sejajar tidak akan berpotongan di satu titik tertentu meski diperpanjang sampai tak berhingga. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa tidak ada titik potong antara dua garis yang sejajar.

2. Menentukan Koordinat Titik Potong Dua Garis

Perhatikan Gambar 3.21.

Gambar 3.21

Pada Gambar 3.21 tampak bahwa garis k dan garis l tidak saling sejajar. Telah kalian pelajari bahwa dua garis yang tidak saling sejajar akan berpotongan di satu titik tertentu. Untuk menentukan titik potong garis k dan l, perhatikan uraian berikut.

Misalkan garis k memiliki persamaan $y_1 = m_1x + c_1$;
garis l memiliki persamaan $y_2 = m_2x + c_2$;

Jika kedua garis ini berpotongan di titik $P(x_o, y_o)$ maka berlaku

$y_o = m_1x_o + c_1$
$y_o = m_2x_o + c_2$

Dari kedua persamaan ini, diperoleh

$$m_1x_o + c_1 = m_2x_o + c_2$$
$$m_1x_o - m_2x_o = c_2 - c_1$$
$$x_o(m_1 - m_2) = c_2 - c_1$$
$$x_o = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2},\ m_1 - m_2 \neq 0$$

Selanjutnya, untuk memperoleh nilai y_o, substitusikan nilai x_o pada salah satu persamaan garisnya.

> Jika $y_1 = m_1x + c_1$ dan $y_2 = m_2x + c_2$ adalah persamaan dua garis yang tidak saling sejajar maka titik potongnya dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan $m_1x + c_1 = m_2x + c_2$, kemudian menyubstitusikan nilai x ke salah satu persamaan garis tersebut.

Tentukan koordinat titik potong garis $x + y = 3$ dan $y = 2x - 1$.

Penyelesaian:

$x + y = 3$ dan $y = 2x - 1$

Ubah terlebih dahulu persamaan garis $x + y = 3$ ke bentuk $y = mx + c$.

$x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x$

$y = 3 - x$ .... (i)

$y = 2x - 1$ .... (ii)

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh

$$3 - x = 2x - 1$$
$$-x - 2x = -1 - 3$$
$$-3x = -4$$
$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Selanjutnya, untuk menentukan nilai y substitusikan nilai x ke persamaan (i).

$$y = 3 - x$$
$$= 3 - \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{5}{3}$$

Jadi, titik potong garis $x + y = 3$ dan $y = 2x – 1$ adalah $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Tentukan titik potong kedua garis berikut.
   a. $y = 3x – 1$ dan $y = x + 5$
   b. $y = x + 1$ dan $y = –5x + 3$
   c. $2x – y – 5 = 0$ dan $x + 2y – 1 = 0$
   d. $3x + 5y = 2$ dan $2x – 7y = 3$
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (1, –3) dan titik potong garis $y = 2x$ dengan $y = 5x – 4$.
3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $2x + 3y = 5$ dan $x – 4y = 1$ dengan gradien 2.
4. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus garis $2x + y = 1$ dan melalui titik potong garis $x = 4y + 4$ dengan $y = 7$.
5. Selidiki kedudukan kedua garis berikut tanpa menggambar terlebih dahulu.
   a. $x + 2y = 7$ dan $y – 2x = –1$
   b. $y = 2x – 5$ dan $y = 2x + 3$
   c. $y = –3x$ dan $x = \frac{1}{3}y + 1$
   d. $5x + 2y = 1$ dan $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y = 0$
6. Diketahui ketiga garis $2x – y – 1 = 0$, $4x – y – 5 = 0$, dan $ax – y – 7 = 0$ berpotongan di satu titik. Tentukan
   a. nilai a;
   b. koordinat titik potong ketiga garis;
   c. persamaan garis yang melalui titik O dan titik potong tersebut.
7. Garis $2x – y = a$ dan $x + by = 4$ berpotongan di titik (2, 1). Tentukan
   a. nilai a dan b;
   b. kedudukan kedua garis.
8. Diketahui garis $3x – ay = 4$ tegak lurus dengan garis $4x – (a – 1)y = 5$. Tentukan
   a. nilai a;
   b. titik potong kedua garis;
   c. persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik potong kedua garis tersebut.

E. MEMECAHKAN MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN KONSEP PERSAMAAN GARIS LURUS

Kalian telah mempelajari mengenai persamaan garis lurus. Dengan konsep-konsep yang telah kalian peroleh, hal itu dapat digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan persamaan garis lurus.

Diketahui garis $6x + py + 4 = 0$ dan $3x - 2py - 5 = 0$ saling tegak lurus. Tentukan

a. nilai p;

b. persamaan garis yang memenuhi.

Penyelesaian:

a. Gradien garis $6x + py + 4 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{6}{p}$.

Gradien garis $3x - 2py - 5 = 0$ adalah $m_2 = \frac{3}{2p}$.

Karena kedua garis saling tegak lurus, maka berlaku $m_1 \times m_2 = -1$.

$$m_1 \times m_2 = -1$$
$$\left(-\frac{6}{p}\right) \times \left(\frac{3}{2p}\right) = -1$$
$$-18 = -2p^2$$
$$p^2 = 9$$
$$p = \pm 3$$

Jadi, nilai p yang memenuhi adalah $p = 3$ atau $p = -3$.

b. Persamaan garis yang memenuhi sebagai berikut.

Untuk $p = 3$, maka persamaan garisnya adalah $6x + 3y + 4 = 0$ dan $3x - 6y - 5 = 0$.

Untuk $p = -3$, maka persamaan garisnya adalah $6x - 3y + 4 = 0$ dan $3x + 6y - 5 = 0$.

(Berpikir kritis)

Bacalah buku-buku referensi yang berkaitan dengan konsep persamaan garis lurus. Cobalah memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan persamaan garis lurus yang terdapat di buku tersebut. Jika mengalami kesulitan, tanyakan pada gurumu agar kalian lebih paham materi tersebut. Diskusikan hal ini dengan temanmu. Susunlah hasilnya dalam bentuk laporan dan kumpulkan kepada gurumu.

Uji Kompetensi 7

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Diketahui garis $ax + 3y + 6 = 0$ tegak lurus dengan garis $3x - 2y - 2a = 0$. Tentukan

   a. nilai a;

   b. titik potong kedua garis.

2. Tentukan nilai p agar persamaan garis $2x + py - 3 = 0$ sejajar dengan garis $x - 3y + 2 = 0$.

3. Diketahui segitiga ABC dengan A(3, 6), B(3, 1), dan C(6, 1). Dengan mencari gradien masing-masing garis yang melalui sisi-sisi segitiga ABC, tunjukkan bahwa segitiga ABC siku-siku di titik B.

4. Diketahui suatu persegi panjang ABCD sisi-sisinya sejajar dengan sumbu koordinat. Titik A(–2, –1) dan C(2, 1) adalah titik sudut yang saling berhadapan. Tentukan

   a. koordinat titik B dan D;

   b. gradien garis yang dilalui diagonal AC dan BD;

   c. persamaan garis yang dilalui diagonal AC dan BD.

5. Diketahui sebuah persegi PQRS dengan R(2, 6) dan S(–4, 6). Titik P dan Q terletak pada sumbu X. Dengan mencari persamaan garis yang melalui diagonal PR dan QS, tunjukkan bahwa diagonal-diagonal sebuah persegi saling tegak lurus.

Rangkuman

1. Persamaan garis lurus dapat ditulis dalam bentuk $y = mx + c$ dengan m dan c suatu konstanta.

2. Langkah-langkah menggambar grafik persamaan $y = mx$ atau $y = mx + c$, $c \neq 0$ sebagai berikut.

   – Tentukan dua titik yang memenuhi persamaan garis tersebut dengan membuat tabel untuk mencari koordinatnya.

   – Gambar dua titik tersebut pada bidang koordinat Cartesius.

   – Hubungkan dua titik tersebut, sehingga membentuk garis lurus yang merupakan grafik persamaan yang dicari.

3. Persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik $P(x_1, y_1)$ adalah $y = \frac{y_1}{x_1}x$.

4. Persamaan garis yang melalui titik $(0, c)$ dan sejajar garis $y = mx$ adalah $y = mx + c$.

5. Gradien suatu garis adalah bilangan yang menyatakan kecondongan suatu garis yang merupakan perbandingan antara komponen y dan komponen x.

6. Garis dengan persamaan $y = mx$ memiliki gradien m dan melalui titik (0, 0).
7. Garis dengan persamaan $y = mx + c$ memiliki gradien m dan melalui titik $(0, c)$.
8. Garis dengan persamaan $ax + by + c = 0$ memiliki gradien $-\frac{a}{b}$.
9. Gradien garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.
10. Gradien garis yang sejajar sumbu X adalah nol.
11. Gradien garis yang sejajar sumbu Y tidak didefinisikan.
12. Garis-garis yang sejajar memiliki gradien yang sama.
13. Hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah –1 atau $m_1 \times m_2 = -1$.
14. Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.
15. Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar garis $y = mx + c$ adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.
16. Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan tegak lurus garis $y = mx + c$ adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
17. Persamaan garis yang melalui dua titik dapat diselesaikan dengan substitusi ke fungsi linear $y = ax + b$.
18. Persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ atau dapat dituliskan $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.
19. Dua garis yang tidak saling sejajar akan berpotongan di satu titik tertentu.
20. Jika y_1 dan y_2 adalah dua buah garis yang tidak saling sejajar maka untuk menentukan titik potong dari dua garis tersebut harus memenuhi $y_1 = y_2$.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, apakah kalian sudah paham mengenai *Persamaan Garis Lurus*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi ini dengan kata-katamu sendiri. Bagian mana dari materi ini yang belum kamu pahami? Catat dan tanyakan kepada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Buatlah dalam sebuah laporan singkat dan serahkan kepada gurumu.

Evaluasi 3

Kerjakan di buku tugasmu.

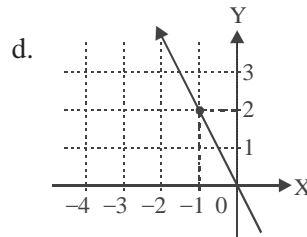
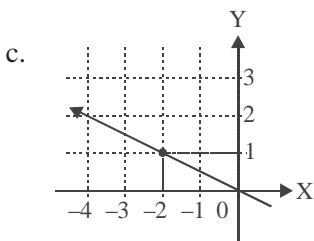
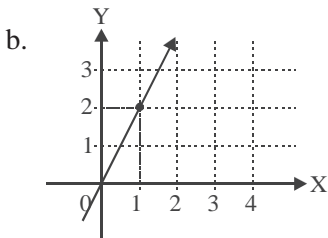
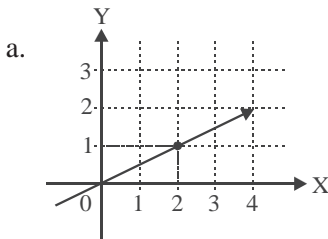
A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1. Grafik persamaan garis $y = 2x$ ditunjukkan oleh gambar ....

a.

b.

c.

d.

2. Jika gradien garis yang melalui titik P(–2, 3a) dan Q(–1, a) adalah –3 maka nilai a = ...
   a. –6
   b. –4
   c. $-\frac{3}{2}$
   d. $\frac{3}{2}$

3. Persamaan garis yang bergradien $-\frac{1}{3}$ dan melalui titik (1, 3) adalah ....
   a. $3x - y + 10 = 0$
   b. $3x - y - 10 = 0$
   c. $x + 3y + 10 = 0$
   d. $x + 3y - 10 = 0$

4. Persamaan garis yang melalui titik (0, 1) dan (1, 6) adalah ....
   a. $x + 5y = 5$
   b. $x = 5y + 1$
   c. $y = 5x - 5$
   d. $5x - y + 1 = 0$

5. Diketahui garis dengan persamaan berikut.
   (i) $2y = 5x - 3$
   (ii) $5y = 2x + 15$
   (iii) $3x + 5y = 15$
   (iv) $10y - 4x = -11$

   Dari persamaan garis di atas, yang sejajar dengan garis yang persamaannya $2x - 5y + 15 = 0$ adalah ....
   a. (i) dan (iii)
   b. (ii) dan (iv)
   c. (ii) dan (iii)
   d. (iii) dan (iv)

6. Diketahui suatu garis memiliki persamaan $2x - y - 3 = 0$.

   i. Gradiennya = $\frac{1}{2}$.

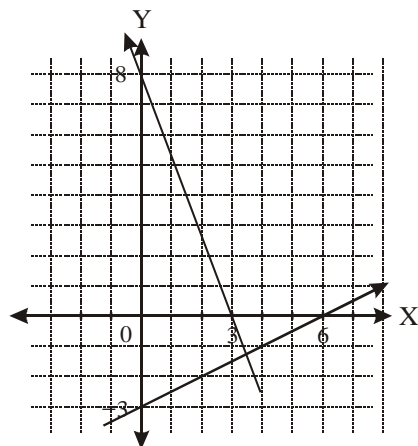
   ii. Memotong sumbu X di titik $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

   iii. Memotong sumbu Y di titik (0, –3).

   Dari pernyataan di atas, yang benar adalah ....
   a. hanya (i) dan (ii)
   b. hanya (i) dan (iii)
   c. hanya (ii) dan (iii)
   d. (i), (ii), dan (iii)

7. Persamaan garis yang melalui titik (2, –3) dan tegak lurus dengan garis $x + y = 10$ adalah ....
   a. $y = x + 5$
   b. $y = x - 5$
   c. $y = -x + 5$
   d. $y = -x - 5$

8. Persamaan garis yang melalui titik (–3, 4) dan sejajar dengan garis yang melalui titik (0, 1) dan (1, 6) adalah ....
   a. $2x - 5y = 11$
   b. $y = -\frac{1}{5}x + 19$
   c. $5x - y - 19 = 0$
   d. $y = 5x + 19$

9.

   Titik potong kedua garis pada gambar di atas adalah ....

   a. $\left(3\frac{9}{19}, -1\frac{5}{19}\right)$

   b. $\left(3\frac{5}{12}, -1\frac{1}{12}\right)$

   c. $\left(-3\frac{9}{19}, 3\frac{5}{19}\right)$

   d. $\left(-3\frac{9}{19}, -1\frac{5}{19}\right)$

10. Titik (a, b) merupakan titik potong garis $y = 3x - 8$ dan $x + y = 12$. Nilai dari $a + b$ adalah ....
    a. 3
    b. 5
    c. 10
    d. 12

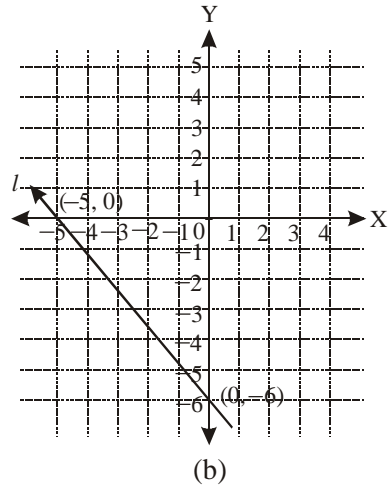
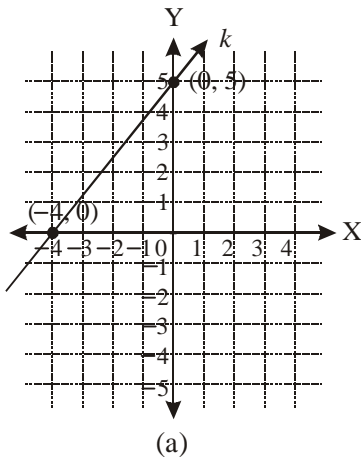
B. *Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.*

1. Tentukan nilai a dan b agar titik
   a. $(–3, a)$ terletak pada garis $2x – y + 3 = 0$;
   b. $(2b, b + 2)$ terletak pada garis $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = 1$.

2. Gambarlah garis-garis berikut pada satu bidang koordinat. Kemudian, tentukan gradien masing-masing garis tersebut.
   a. $\frac{1}{2}x - 3y = 6$
   b. $y = -\frac{3}{4}x + 5$
   c. $3x + 2y – 6 = 0$
   d. $1\frac{1}{2}x + 2y = 3$

3. Tentukan persamaan garis k dan l pada gambar berikut.

(a)

(b)

4. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A(1, 4) dan
   a. titik B(–5, 7);
   b. bergradien $\frac{1}{2}$;
   c. sejajar dengan garis $x + 3y = 1$;
   d. tegak lurus dengan garis $2x – 5y = 0$.

5. Diketahui garis $4x – ay = 5$ dan $3x + (a + 1)y = 10$ saling tegak lurus. Tentukan
   a. nilai a;
   b. titik potong kedua garis;
   c. persamaan garis yang melalui titik O(0, 0) dan titik potong kedua garis tersebut.

BAB 4 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Sumber: *Dok. Penerbit*

Pernahkah kalian berbelanja di toko buku? Pasti sudah pernah, bukan? Misalkan suatu saat kamu membeli 3 buku tulis dan 2 pensil dengan tidak memerhatikan harga masing-masing buku dan pensil tersebut sehingga kamu harus membayar Rp4.750,00, sedangkan adikmu membeli 2 buku tulis dan 1 pensil sehingga ia harus membayar Rp3.000,00. Dapatkah kamu menentukan harga masing-masing buku dan pensil tersebut? Bagaimanakah kita dapat memecahkan permasalahan ini? Dapatkah kita selesaikan dengan sistem persamaan linear dua variabel?

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menyebutkan perbedaan persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel;
- ❖ dapat mengenal sistem persamaan linear dua variabel dalam berbagai bentuk dan variabel;
- ❖ dapat menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan substitusi dan eliminasi;
- ❖ dapat membuat model matematika dari masalah sehari-hari yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel;
- ❖ dapat menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ persamaan linear dua variabel
- ❖ sistem persamaan linear dua variabel
- ❖ penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel
- ❖ model matematika
- ❖ penyelesaian model matematika

(Berpikir kritis)

Buatlah tabel pasangan nilai (x, y) yang memenuhi persamaan garis $y = 2x – 3$ dan $3x – 4y = 7$. Kemudian, gambarlah kedua persamaan tersebut dalam bidang koordinat Cartesius. Di manakah titik potongnya? Lalu, tentukan titik potong kedua persamaan tersebut tanpa menggambar grafiknya. Bandingkan hasilnya. Apakah hasil yang kalian peroleh sama?

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kalian harus menguasai terlebih dahulu mengenai persamaan linear satu variabel, himpunan, sistem koordinat Cartesius, dan persamaan garis lurus.

A. PERSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL

Coba kalian ingat kembali mengenai persamaan linear satu variabel yang telah kalian pelajari di kelas VII.

Perhatikan persamaan-persamaan berikut.

1. $2x + 5 = 3$
2. $1 – 2y = 6$
3. $z + 1 = 2z$

Variabel pada persamaan (1) adalah x, pada persamaan (2) adalah y, dan pada persamaan (3) adalah z. Persamaan-persamaan di atas adalah contoh bentuk persamaan linear satu variabel, karena masing-masing persamaan memiliki satu variabel dan berpangkat satu. Variabel x, y, dan z adalah variabel pada himpunan tertentu yang ditentukan dari masing-masing persamaan tersebut.

Persamaan linear satu variabel dapat dinyatakan dalam bentuk $ax = b$ atau $ax + b = c$ dengan a, b, dan c adalah konstanta, $a \neq 0$, dan x variabel pada suatu himpunan.

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut.

a. $3x + 1 = 4$; $x \in$ B (B himpunan bilangan bulat)

b. $2y + 5 = –3y + 7$; $x \in$ Q (Q himpunan bilangan rasional)

Penyelesaian:

a.
$$
\begin{aligned}
& 3x + 1 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & 3x + 1 - 1 = 4 - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 3x = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1
\end{aligned}
$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {1}.

b.
$$
\begin{aligned}
& 2y + 5 = –3y + 7 \\
\Leftrightarrow\ & 2y + 5 - 5 = -3y + 7 - 5 \\
\Leftrightarrow\ & 2y = -3y + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 2y + 3y = -3y + 3y + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 5y = 2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{5} \times 5y = \frac{1}{5} \times 2
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{5}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut jika variabelnya pada himpunan bilangan bulat.

1. $3x + 2 = 8$
2. $2(3x + 6) = 3(x - 2)$
3. $\frac{1}{2}(p-3)+\frac{2}{3}(3p+6)=15$
4. $3x - 4 = x - 8$
5. $5p - p = -16$
6. $\frac{2}{3}(2x+3)=6$
7. $r + 5 = 7$
8. $\frac{2y-3}{2}+\frac{5y+4}{4}=4$
9. $5x + 3 = 2x - 9$
10. $\frac{2x-3}{2}=4+\frac{5x+6}{4}$

B. PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

1. Pengertian Persamaan Linear Dua Variabel

Coba kalian ingat kembali bahwa persamaan garis lurus pada bidang Cartesius dapat dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$ dengan a, b, c konstanta real dengan $a, b \neq 0$, dan x, y adalah variabel pada himpunan bilangan real.

Perhatikan persamaan-persamaan berikut.

a. $x + 5 = y$

b. $2a - b = 1$

c. $3p + 9q = 4$

Persamaan-persamaan di atas adalah contoh bentuk persamaan linear dua variabel. Variabel pada persamaan $x + 5 = y$ adalah x dan y, variabel pada persamaan $2a - b = 1$ adalah a dan b. Adapun variabel pada persamaan $3p + 9q = 4$ adalah p dan q.

Perhatikan bahwa pada setiap contoh persamaan di atas, banyaknya variabel ada dua dan masing-masing berpangkat satu.

Persamaan linear dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$ dengan $a, b, c \in$ R, $a, b \neq 0$, dan x, y suatu variabel.

(Menumbuhkan kreativitas)

Bacalah buku-buku referensi yang berkaitan dengan materi persamaan. Pelajari mengenai bentuk-bentuk persamaan. Buatlah ulasan mengenai bentuk-bentuk persamaan. Berikan contoh-contoh yang mendukung. Ceritakan hasilnya secara singkat di depan kelas.

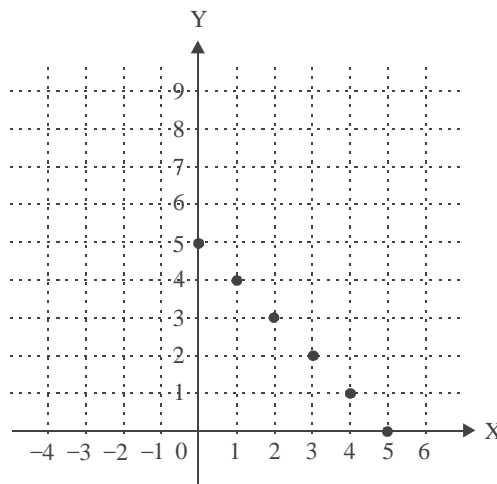
2. Penyelesaian Persamaan Linear Dua Variabel

Perhatikan persamaan $x + y = 5$. Persamaan $x + y = 5$ masih merupakan *kalimat terbuka*, artinya belum mempunyai nilai kebenaran. Jika nilai x kita ganti bilangan 1 maka nilai y yang memenuhi adalah 4. Karena pasangan bilangan (1, 4) memenuhi persamaan tersebut, maka persamaan $x + y = 5$ menjadi kalimat yang benar. Dalam hal ini dikatakan bahwa (1, 4) merupakan salah satu *penyelesaian* dari persamaan $x + y = 5$.

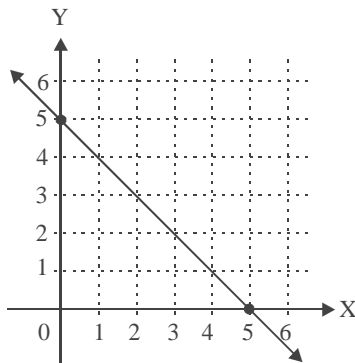
Apakah hanya (1, 4) yang merupakan penyelesaian $x + y = 5$? Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari $x + y = 5$ dengan $x + y$ variabel pada himpunan bilangan cacah maka kita harus mencari nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut.

Untuk mencari nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x + y = 5$ akan lebih mudah dengan membuat tabel seperti berikut.

x	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0
(x, y)	(0, 5)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 1)	(5, 0)

Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan $x + y = 5$ adalah {(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)}. Gambar grafik persamaan $x + y = 5$ pada bidang Cartesius tampak seperti Gambar 4.1 berikut.

Gambar 4.1

Jika x dan y variabel pada himpunan bilangan cacah maka grafik penyelesaian persamaan $x + y = 5$ berupa noktah/titik-titik. Adapun, jika x dan y variabel pada himpunan bilangan real maka titik-titik tersebut dihubungkan sehingga membentuk garis lurus seperti Gambar 4.2.

Jika kalian ambil pasangan bilangan (2, 1) dan disubstitusikan pada persamaan $x + y = 5$ maka diperoleh $2 + 1 \neq 5$ (kalimat salah). Karena pasangan bilangan (2, 1) tidak memenuhi persamaan $x + y = 5$ maka bilangan (2, 1) disebut *bukan penyelesaian* persamaan $x + y = 5$.

Gambar 4.2

(Berpikir kritis)

Perhatikan pernyataan berikut.

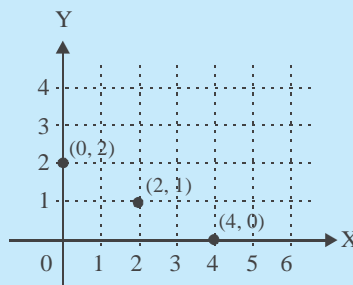
1. Jika x dan y bilangan cacah maka grafik penyelesaian persamaan $ax + by = c$ pada bidang Cartesius berupa noktah/titik.
2. Jika x dan y bilangan real maka grafik penyelesaian persamaan $ax + by = c$ pada bidang Cartesius membentuk garis lurus.

Tunjukkan alasan perbedaan kedua pernyataan di atas.

1. Gambarlah grafik himpunan penyelesaian persamaan $x + 2y = 4$ untuk x, y variabel pada himpunan bilangan cacah.

Penyelesaian:

Buatlah tabel untuk menentukan pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi persamaan $x + 2y = 4$.

x	0	2	4
y	2	1	0
(x, y)	(0, 2)	(2, 1)	(4, 0)

Gambar 4.3

Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan $x + 2y = 4$ dengan x, y variabel pada himpunan bilangan cacah adalah $\{(0, 2), (2, 1), (4, 0)\}$. Grafiknya seperti tampak pada Gambar 4.3.

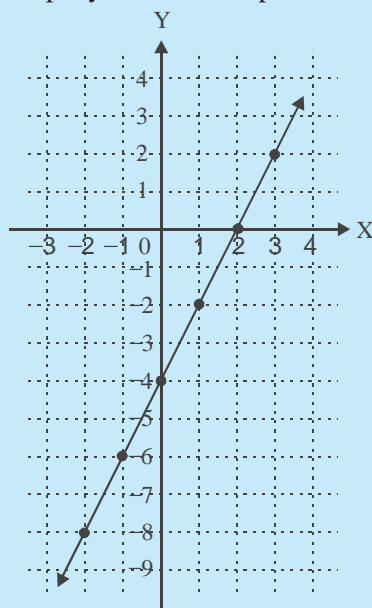
2. Gambarlah grafik himpunan penyelesaian persamaan $2x - y = 4$ untuk x, y variabel pada himpunan bilangan real.

Penyelesaian:

Untuk mempermudah dalam menggambar grafik persamaan $2x - y = 4$ dibuat tabel berikut.

x	0	2
y	–4	0
(x, y)	(0, –4)	(2, 0)

Karena x, y variabel pada himpunan bilangan real, maka grafik himpunan penyelesaiannya berbentuk garis lurus, seperti tampak pada Gambar 4.4.

Semua titik-titik yang terletak pada garis tersebut merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan $2x - y = 4$.

Gambar 4.4

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Bandingkan persamaan-persamaan berikut dengan bentuk persamaan $ax + by = c$, kemudian tentukan nilai a, b, dan c.
   a. $3x + 2y = 0$
   b. $2x - 5y = 3$
   c. $x + 2y = 5$
   d. $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$

2. Nyatakan persamaan berikut dalam bentuk $ax + by = c$, kemudian tentukan koefisien dari masing-masing variabel.
   a. $x = 2y - 5$
   b. $x + 3y + 1 = 0$

c. $3x - 1 = 2y$

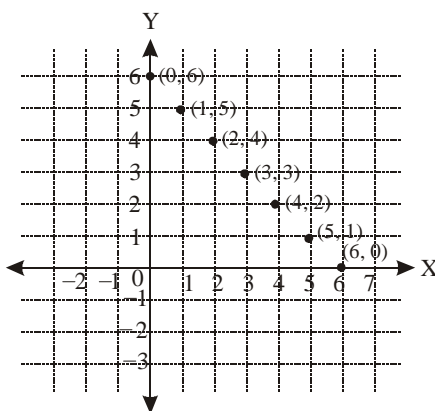
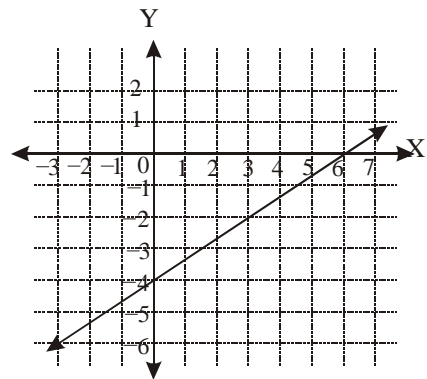
d. $y = \frac{1}{2}x - 2$

3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut jika x, y variabel pada himpunan bilangan cacah. Kemudian, gambar grafik dari masing-masing persamaan tersebut pada bidang koordinat Cartesius.

a. $x + y = 3$ c. $x + 2y = 4$

b. $2x + 3y = 6$ d. $3x - y = 6$

4. Tentukan persamaan dari grafik berikut ini.

a.

b.

5. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut jika x, y variabel pada himpunan bilangan real. Kemudian, gambarlah grafik dari masing-masing persamaan tersebut pada bidang Cartesius.

a. $2x + y = 6$

b. $2x + 3y = 12$

c. $\frac{1}{2}y - x - 2 = 0$

d. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}$

C. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Kalian telah mempelajari penyelesaian dari sebuah persamaan linear dua variabel. Bagaimana penyelesaian dari dua buah persamaan linear dua variabel? Agar kalian lebih mudah memahaminya, perhatikan ilustrasi berikut.

Dea membeli sebuah baju dan 2 buah kaos, ia harus membayar Rp100.000,00. Adapun Butet membeli sebuah baju dan 3 buah kaos, ia harus membayar Rp120.000,00. Dapatkah kalian menentukan harga dari sebuah baju dan sebuah kaos?

Perhatikan bahwa selisih uang yang mereka bayarkan adalah Rp20.000,00, sedangkan selisih banyaknya kaos yang mereka beli adalah sebuah. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa harga sebuah kaos adalah Rp20.000,00.

Dapatkah kalian menentukan harga dari sebuah baju? Diskusikan hal ini dengan teman sebangkumu.

Misalkan x = harga 1 baju dan y = harga 1 kaos, maka ilustrasi di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$x + 2y = 100.000$

$x + 3y = 120.000$

Kedua persamaan tersebut dikatakan membentuk *sistem persamaan linear dua variabel.*

Apabila terdapat dua persamaan linear dua variabel yang berbentuk $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$ atau biasa ditulis

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ maka dikatakan dua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel. Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel tersebut adalah pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi kedua persamaan tersebut.

Misalnya kalian akan menentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan $2x + y = 8$ dan $x - 2y = 4$ dengan x, y variabel pada himpunan bilangan real. Kalian dapat menentukan penyelesaiannya dengan mencari nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Untuk memudahkan kalian menentukannya, buatlah tabel seperti berikut.

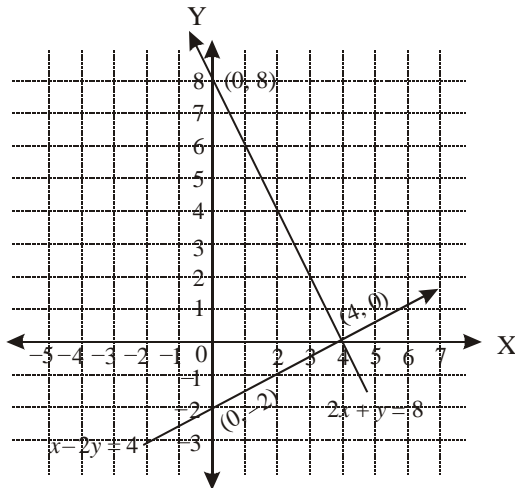
$2x + y = 8$

x	y
0	8
4	0
1	6

$x - 2y = 4$

x	y
0	–2
4	0
6	1

Dari tabel di atas tampak bahwa himpunan penyelesaian dari persamaan $2x + y = 8$ adalah {(0, 8), (4, 0), (1, 6)}, sedangkan himpunan penyelesaian dari persamaan $x - 2y = 4$ adalah {(0, –2), (4, 0), (6, 1)}. Dari dua himpunan penyelesaian tersebut, {(4, 0)} adalah *himpunan penyelesaian* yang memenuhi sistem persamaan $2x + y = 8$ dan $x - 2y = 4$. Adapun {(0, 8), (1, 6), (0, –2), (6, 1)} dikatakan *bukan penyelesaian* dari sistem persamaan tersebut.

Jika dibuat grafik dalam sebuah bidang koordinat Cartesius, titik (4, 0) merupakan titik potong persamaan $2x + y = 8$ dan $x - 2y = 4$, seperti tampak pada Gambar 4.5.

Gambar 4.5

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dapat dilakukan dengan metode grafik, eliminasi, substitusi, dan metode gabungan.

1. Metode Grafik

Pada metode grafik, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel adalah koordinat titik potong dua garis tersebut. Jika garis-garisnya tidak berpotongan di satu titik tertentu maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong.

Dengan metode grafik, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel $x + y = 5$ dan $x - y = 1$ jika x, y variabel pada himpunan bilangan real.

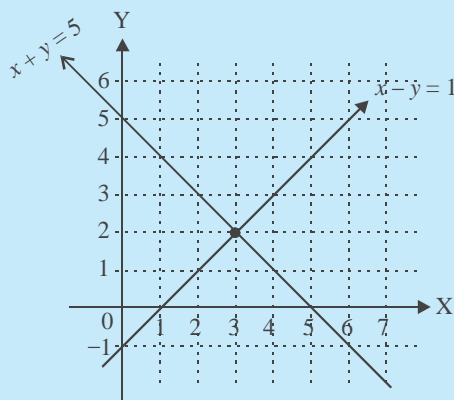
Penyelesaian:

Untuk memudahkan menggambar grafik dari $x + y = 5$ dan $x - y = 1$, buatlah tabel nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut.

$x + y = 5$

x	0	5
y	5	0
(x, y)	(0, 5)	(5, 0)

$x - y = 1$

x	0	1
y	–1	0
(x, y)	(0, –1)	(1, 0)

Gambar 4.6

Gambar 4.6 adalah grafik sistem persamaan dari $x + y = 5$ dan $x - y = 1$. Dari gambar tampak bahwa koordinat titik potong kedua garis adalah (3, 2).
Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $x + y = 5$ dan $x - y = 1$ adalah {(3, 2)}.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut untuk $x, y \in$ R dengan metode grafik.

1. $x + y = 3$ dan $x - y = 2$
2. $2x - y = 1$ dan $3x + y = 4$
3. $2x + y = 1$ dan $2x - y = 2$
4. $x - y = 5$ dan $x + y = 2$
5. $2x - 4y = 6$ dan $2x - 2y = 4$
6. $x + 2y = 4$ dan $x = 3$
7. $3x + y = 3$ dan $y = 3$
8. $y = x - 3$ dan $y = 2x$
9. $x + y = 4$ dan $2x + 2y = 6$
10. $x - 3y = 3$ dan $2x - 6y = 6$

Tugas Mandiri

(Menumbuhkan inovasi)

Amatilah kembali grafik sistem persamaan dari no. 9 dan 10 pada soal Uji Kompetensi 3. Bagaimana himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut? Buatlah kesimpulannya.

2. Metode Eliminasi

Pada metode eliminasi, untuk menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel, caranya adalah dengan menghilangkan (mengeliminasi) salah satu variabel dari sistem persamaan tersebut. Jika variabelnya x dan y, untuk menentukan variabel x kita harus mengeliminasi variabel y terlebih dahulu, atau sebaliknya.

Perhatikan bahwa jika koefisien dari salah satu variabel sama maka kita dapat mengeliminasi atau menghilangkan salah satu variabel tersebut, untuk selanjutnya menentukan variabel yang lain. Agar kalian lebih mudah memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Dengan metode eliminasi, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan $2x + 3y = 6$ dan $x – y = 3$.

Penyelesaian:

$2x + 3y = 6$ dan $x – y = 3$

Langkah I (eliminasi variabel y)

Untuk mengeliminasi variabel y, koefisien y harus sama, sehingga persamaan $2x + 3y = 6$ dikalikan 1 dan persamaan $x – y = 3$ dikalikan 3.

$$\begin{array}{r|l|l} 2x+3y=6 & \times 1 & 2x+3y=6 \\ x-y=3 & \times 3 & 3x-3y=9 \\ \hline & & 2x+3x=6+9 \quad + \end{array}$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

Langkah II (eliminasi variabel x)

Seperti pada langkah I, untuk mengeliminasi variabel x, koefisien x harus sama, sehingga persamaan $2x + 3y = 6$ dikalikan 1 dan persamaan $x – y = 3$ dikalikan 2.

$$\begin{array}{r|l|l} 2x+3y=6 & \times 1 & \Leftrightarrow 2x+3y=6 \\ x-y=3 & \times 2 & \Leftrightarrow 2x-2y=6 \\ \hline & & \quad - \end{array}$$

$$3y-(-2y) = 6-6$$

$$3y+2y = 0$$

$$5y = 0$$

$$y = \frac{0}{5} = 0$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(3, 0)\}$.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode eliminasi, jika x dan y variabel pada himpunan bilangan real.

1. $x + y = 1$ dan $x + 5y = 5$
2. $3x + 2y = 12$ dan $2x - y = 8$
3. $2x + y = 5$ dan $3x - 2y = 4$
4. $3x + 2y = 12$ dan $2x + 3y = 18$
5. $x + y = 12$ dan $3x - y = 4$
6. $x + 2y = 4$ dan $2x - y = 3$
7. $2x - 4y = 10$ dan $x + 2y = 9$
8. $x + y = 6$ dan $-x + 3y = 2$
9. $x + 2y = 4$ dan $2x + 4y = 5$
10. $3x - y = 2$ dan $6x - 2y = 4$

3. Metode Substitusi

(Menumbuhkan inovasi)

Amatilah kembali himpunan penyelesaian dari soal no. 9 dan 10 pada Uji Kompetensi 4.
Buatlah kesimpulan dengan kata-katamu sendiri.

Di bagian depan kalian telah mempelajari cara menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$ dengan metode grafik dan eliminasi.

Sekarang kita akan mencoba menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan metode substitusi. Perhatikan uraian berikut.

Persamaan $x - y = 3$ ekuivalen dengan $x = y + 3$. Dengan menyubstitusi persamaan $x = y + 3$ ke persamaan $2x + 3y = 6$ diperoleh sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
& 2x + 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 2(y+3) + 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 2y + 6 + 3y = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 5y + 6 = 6 \\
\Leftrightarrow\ & 5y + 6 - 6 = 6 - 6 \\
\Leftrightarrow\ & 5y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & y = 0
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai x, substitusikan nilai y ke persamaan $x = y + 3$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
& x = y + 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 + 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3
\end{aligned}
$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$ adalah {(3, 0)}.

Berdasarkan uraian di atas dapat dikatakan bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan metode substitusi, terlebih dahulu kita nyatakan variabel yang satu ke dalam variabel yang lain dari suatu persamaan, kemudian menyubstitusikan (menggantikan) variabel itu dalam persamaan yang lainnya.

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan metode substitusi jika x, y variabel pada himpunan bilangan real.

1. $3x + y = 4$ dan $-x + 2y = 1$
2. $x + y = 5$ dan $y = x + 1$
3. $x + 5y = -5$ dan $x + y + 5 = 0$
4. $2x - 3y = 11$ dan $3x + y = 0$
5. $x = y + 2$ dan $y = 2x - 5$
6. $y = -x$ dan $3x + y = 2$
7. $2x + 3y = 0$ dan $x + y = 1$
8. $2x + y + 5 = 2$ dan $3y + 2x = -5$
9. $4x + 3y = 6$ dan $2x - y = 3$
10. $2x + 4y = 6$ dan $4x + 8y - 8 = 0$

4. Metode Gabungan

Kalian telah mempelajari cara menentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel dengan metode grafik, eliminasi, dan substitusi. Sekarang kalian akan mempelajari cara yang lain, yaitu dengan metode gabungan eliminasi dan substitusi. Perhatikan contoh berikut.

Dengan metode gabungan, tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2x - 5y = 2$ dan $x + 5y = 6$, jika $x, y \in$ R.

Penyelesaian:

Langkah pertama yaitu dengan metode eliminasi, diperoleh

$$\begin{array}{r|l} 2x - 5y = 2 & \times 1 \\ x + 5y = 6 & \times 2 \end{array} \begin{array}{l} \Leftrightarrow 2x - 5y = 2 \\ \Leftrightarrow 2x + 10y = 12 \end{array}$$

$$\underline{} \; -$$

$$-15y = -10$$

$$y = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}$$

Selanjutnya substitusikan nilai y ke persamaan $x + 5y = 6$, sehingga diperoleh

$$x + 5y = 6$$
$$\Leftrightarrow x + 5\left(\frac{2}{3}\right) = 6$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{10}{3} = 6$$
$$\Leftrightarrow x = 6 - \frac{10}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 2\frac{2}{3}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan $2x - 5y = 2$ dan $x + 5y = 6$ adalah $\left\{\left(2\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel berikut dengan menggunakan metode gabungan, jika $x, y \in$ R.

1. $x + y = 7$ dan $x - y = 3$
2. $x + 2y - 1 = 0$ dan $y - x + 4 = 0$
3. $3x + 2y = 6$ dan $2x - y = 5$
4. $2x + 5y = 8$ dan $x + 5y = 2$
5. $y = 2x - 5$ dan $y = x + 3$
6. $x = 2y - 3$ dan $y = 2x + 1$
7. $x + 2y = 3$ dan $x + y = 5$
8. $2x - 3y = 3$ dan $y = 2x - 1$
9. $5x - y = 3$ dan $10x - 5y = 15$
10. $x + 4y = 8$ dan $2x - y = 3$

1. Dua bilangan cacah berbeda 15 dan jumlahnya 55. Tentukan hasil kali kedua bilangan tersebut.
2. Lebar sebuah persegi panjang 2 cm kurang dari panjangnya dan kelilingnya 16 cm. Tentukan luas persegi panjang tersebut.

D. MEMBUAT MODEL MATEMATIKA DAN MENYELESAIKAN MASALAH SEHARI-HARI YANG MELIBATKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan perhitungan yang melibatkan sistem persamaan linear dua variabel. Permasalahan sehari-hari tersebut biasanya disajikan dalam bentuk soal cerita.

Langkah-langkah menyelesaikan soal cerita sebagai berikut.

1. Mengubah kalimat-kalimat pada soal cerita menjadi beberapa kalimat matematika (model matematika), sehingga membentuk sistem persamaan linear dua variabel.

2. Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel.
3. Menggunakan penyelesaian yang diperoleh untuk menjawab pertanyaan pada soal cerita.

Asep membeli 2 kg mangga dan 1 kg apel dan ia harus membayar Rp15.000,00, sedangkan Intan membeli 1 kg mangga dan 2 kg apel dengan harga Rp18.000,00. Berapakah harga 5 kg mangga dan 3 kg apel?

Penyelesaian:

Misalkan harga 1 kg mangga $= x$

harga 1 kg apel $= y$

Kalimat matematika dari soal di samping adalah

$$\begin{cases} 2x + y = 15.000 \\ x + 2y = 18.000 \end{cases}$$

Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan metode gabungan.

Langkah I: Metode eliminasi

$$\begin{array}{l|l|l} 2x + y = 15.000 & \times 1 & 2x + y = 15.000 \\ x + 2y = 18.000 & \times 2 & 2x + 4y = 36.000 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y - 4y &= 15.000 - 36.000 \quad - \\ \Leftrightarrow \quad -3y &= -21.000 \\ \Leftrightarrow \quad y &= \frac{-21.000}{-3} = 7.000 \end{aligned}$$

Langkah II: Metode substitusi

Substitusi nilai y ke persamaan $2x + y = 15.000$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 15.000 \\ 2x + 7.000 &= 15.000 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 15.000 - 7.000 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 8.000 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{8.000}{2} = 4.000 \end{aligned}$$

Dengan demikian, harga 1 kg mangga adalah Rp4.000,00 dan harga 1 kg apel adalah Rp7.000,00.

Jadi, harga 5 kg mangga dan 3 kg apel adalah

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= (5 \times \text{Rp}4.000,00) + (3 \times \text{Rp}7.000,00) \\ &= \text{Rp}20.000,00 + \text{Rp}21.000,00 \\ &= \text{Rp}41.000,00 \end{aligned}$$

Uji Kompetensi 7

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Jumlah panjang dan lebar suatu persegi panjang adalah 32 cm, sedangkan luasnya 240 cm^2. Tentukan
   a. panjang dan lebarnya;
   b. kelilingnya;
   c. panjang diagonal persegi panjang.
2. Selisih umur seorang ayah dan anak perempuannya adalah 26 tahun, sedangkan lima tahun yang lalu jumlah umur keduanya 34 tahun. Hitunglah umur ayah dan anak perempuannya dua tahun yang akan datang.
3. Sebuah toko kelontong menjual dua jenis beras sebanyak 50 kg. Harga 1 kg beras jenis I adalah Rp6.000,00 dan jenis II adalah Rp6.200,00/kg. Jika harga beras seluruhnya Rp306.000,00 maka
   a. susunlah sistem persamaan dalam x dan y;
   b. tentukan nilai x dan y;
   c. tentukan jumlah harga 4 kg beras jenis I dan 7 kg beras jenis II.
4. Asti dan Anton bekerja pada sebuah perusahaan sepatu. Asti dapat membuat tiga pasang sepatu setiap jam dan Anton dapat membuat empat pasang sepatu setiap jam. Jumlah jam bekerja Asti dan Anton 16 jam sehari, dengan banyak sepatu yang dapat dibuat 55 pasang. Jika banyaknya jam bekerja keduanya tidak sama, tentukan lama bekerja Asti dan Anton.
5. Dalam sebuah pertandingan sepak bola, terjual karcis kelas I dan kelas II sebanyak 500 lembar. Harga karcis kelas I adalah Rp8.000,00, sedangkan harga karcis kelas II adalah Rp6.000,00. Jika hasil penjualan seluruh karcis adalah Rp2.950.000,00, tentukan banyak karcis masing-masing kelas I dan kelas II yang terjual.

(Menumbuhkan inovasi)

Amatilah lingkungan di sekitarmu.
Buatlah sistem persamaan linear dua variabel yang berkaitan dengan masalah sehari-hari. Lalu selesaikan dengan metode grafik, eliminasi, substitusi, dan metode gabungan. Bandingkan hasilnya dan buatlah kesimpulannya.

E. MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR DUA VARIABEL DENGAN MENGUBAH KE BENTUK SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Perhatikan beberapa sistem persamaan berikut.

1) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y - x = -3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a - 3b = 4 \\ a - 4b = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5a^2 + b^2 = 6 \\ -a^2 - 3b^2 = 4 \end{cases}$

Di antara sistem persamaan di atas, dapatkah kalian menemukan perbedaannya?

Perhatikan bahwa sistem persamaan nomor 1 dan 3 merupakan sistem persamaan linear dua variabel, karena mempunyai dua variabel yang berpangkat satu. Adapun nomor 2 dan 4 merupakan sistem persamaan nonlinear dua variabel, karena mempunyai dua variabel yang berpangkat dua atau tidak linear.

Sistem persamaan nonlinear dua variabel dapat diselesaikan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu ke bentuk linear.

(Berpikir kritis)
Selesaikan sistem persamaan berikut.

a. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{y+1} = 4$

dan

$\frac{1}{x+1} - \frac{5}{y+1} = 3$

b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ dan

$2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3$

Selesaikan sistem persamaan nonlinear dua variabel berikut.

$\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 5$ dan $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$

Penyelesaian:

$\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 5$ dan $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$

Misalkan $\frac{1}{x} = a$ dan $\frac{1}{y} = b$, sehingga bentuk sistem persamaan linear dua variabelnya adalah

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 5 \Leftrightarrow a + 5b = 5$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6 \Leftrightarrow 2a + 3b = 6$$

Kemudian, selesaikan persamaan-persamaan tersebut dengan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel sebagai berikut.

$$
\begin{array}{l|l} a + 5b = 5 & \times 2 \\ 2a + 3b = 6 & \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow 2a + 10b = 10 \\ \Leftrightarrow 2a + 3b \ = 6 \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
10b - 3b &= 10 - 6 \quad - \\
7b &= 4 \\
b &= \frac{4}{7}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya substitusi nilai b ke persamaan $a + 5b = 5$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
& a + 5b = 5 \\
\Leftrightarrow\ & a + 5 \times \frac{4}{7} = 5 \\
\Leftrightarrow\ & a + \frac{20}{7} = 5 \\
\Leftrightarrow\ & a = \frac{15}{7}
\end{aligned}
$$

Setelah diperoleh nilai a dan b, kembalikan nilai a dan b ke pemisalan semula.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{x} = a & \qquad & \frac{1}{y} = b \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x} = \frac{15}{7} & \qquad \Leftrightarrow\ & \frac{1}{y} = \frac{4}{7} \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{7}{15} & \qquad \Leftrightarrow\ & y = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

Jadi, penyelesaian persamaan

$\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = 5$ dan $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$ adalah $x = \frac{7}{15}$ dan $y = \frac{7}{4}$.

(Berpikir kritis)

Apakah setiap sistem persamaan nonlinear dua variabel dapat diselesaikan? Diskusikan hal ini dengan temanmu. Jelaskan jawabanmu.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.

1. $2x^2 - 3 = -(1 + y)^2$ dan $x^2 + (1 + y)^2 = 2$
2. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 12$ dan $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 7$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ dan $2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3$
4. $4\sqrt{x} + 3\sqrt{y+5} = 17$ dan $\sqrt{x} - \sqrt{y+5} = 3$
5. $\frac{1}{x+3} + \frac{3}{y+3} = 1$ dan $\frac{3}{x+3} + \frac{1}{y+3} = 1$

Rangkuman

1. Persamaan linear satu variabel dapat dinyatakan dalam bentuk $ax = b$ atau $ax + b = c$ dengan a, b, dan c adalah konstanta, $a \neq 0$, dan x variabel pada suatu himpunan.
2. Persamaan linear dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$ dengan $a, b, c \in$ R, $a, b \neq 0$, dan x, y suatu variabel.
3. Grafik penyelesaian persamaan linear dua variabel berupa noktah/titik dan garis lurus.
4. Apabila terdapat dua persamaan linear dua variabel yang berbentuk $ax + by = c$ dan $dx + ey = f$ atau biasa ditulis $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ maka dikatakan dua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel.
5. Pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi kedua persamaan di atas disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel.
6. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dapat dilakukan dengan metode grafik, eliminasi, substitusi, dan metode gabungan.
7. Untuk menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel, terlebih dahulu ubahlah soal cerita tersebut menjadi beberapa kalimat atau model matematika, kemudian selesaikan sistem persamaan tersebut.
8. Sistem persamaan nonlinear dua variabel dapat diselesaikan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu ke bentuk sistem persamaan linear dua variabel, yaitu dengan pemisalan sehingga terbentuk variabel-variabel baru. Selanjutnya kembalikan penyelesaian variabel-variabel baru tersebut ke variabel semula.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, bagaimana pemahaman kalian mengenai *Sistem Persamaan Linear Dua Variabel*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum materi tersebut dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Menurutmu, bagian manakah dari materi ini yang paling menarik? Kemukakan pendapatmu. Buatlah dalam sebuah laporan dan serahkan kepada gurumu.

Evaluasi 4

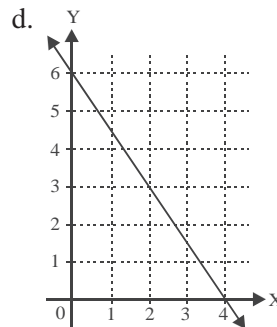
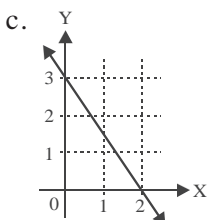
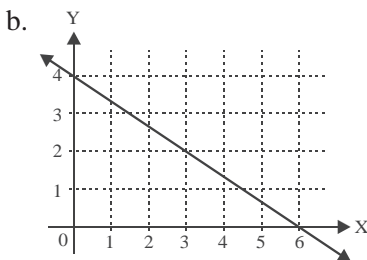
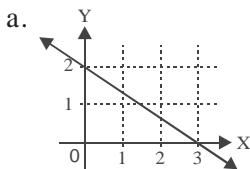
Kerjakan di buku tugasmu.

A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1. Himpunan penyelesaian persamaan $2x + y = 10$ untuk $x, y \in$ {bilangan cacah} adalah ....
   a. {(0, 10), (5, 0)}
   b. {(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)}
   c. {(0, 10), (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)}
   d. {(0, 10), (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2), (5, 0)}

2. Penyelesaian dari sistem persamaan $3p + 4q = –16$ dan $2p – q = –18$ untuk p, q variabel pada himpunan bilangan bulat adalah p dan q. Nilai $p + q$ = ...
   a. –4 c. –6
   b. 6 d. 4

3. Grafik dari himpunan penyelesaian $2x + 3y = 12$ untuk $x, y \in$ R adalah ....

   a.
   b.
   c.
   d.
   Y
   6
   5
   4
   3
   2
   1
   0 1 2 3 4 X

4. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $4x + 7y = 5$ dan $x + y = –1$ adalah ....
   a. {(–4, 3)} c. {(3, –4)}
   b. {(4, –3)} d. {(–3, 4)}

5. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $y = 2x + 1$ dan $3x – 5y = 16$ adalah ....
   a. {(–3, 5)} c. {(5, 3)}
   b. {(–3, –5)} d. {(–5, 3)}

6. Harga 7 ekor ayam dan 6 ekor itik adalah Rp67.250,00, sedangkan harga 2 ekor ayam dan 3 ekor itik Rp25.000,00. Harga seekor ayam adalah ....
   a. Rp4.500,00 c. Rp6.750,00
   b. Rp5.750,00 d. Rp7.500,00

7. Diketahui penyelesaian sistem persamaan $3x + 4y = 7$ dan $–2x + 3y = –16$ adalah x dan y dengan $x, y \in$ {bilangan bulat}. Nilai $2x – 7y$ = ...
   a. –24 c. 4
   b. –4 d. 24

8. Pada sebuah tempat parkir terdapat 84 kendaraan yang terdiri atas sepeda motor dan mobil. Setelah dihitung jumlah roda seluruhnya ada 220 buah. Jika tarif parkir untuk sepeda motor Rp1.000,00 dan untuk mobil Rp2.000,00, besar uang yang diterima tukang parkir adalah ....
   a. Rp91.000,00
   b. Rp110.000,00
   c. Rp156.000,00
   d. Rp171.000,00

9. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\frac{x+1}{3}+\frac{2x-y}{5}=2$ dan $x + y = 2$, jika $x, y \in$ R adalah ....
   a. $\left\{\left(\frac{31}{14}, -\frac{3}{14}\right)\right\}$ c. $\left\{\left(\frac{3}{14}, \frac{31}{14}\right)\right\}$
   b. $\left\{\left(\frac{3}{14}, -\frac{31}{14}\right)\right\}$ d. $\left\{\left(-\frac{31}{14}, -\frac{3}{14}\right)\right\}$

10. Di antara sistem persamaan berikut yang memiliki tak berhingga banyak penyelesaian untuk $x, y \in$ R adalah ....
    a. $x + y = 2$ dan $x - y = 5$
    b. $2x - 3 = y$ dan $x - 1 = 2y$
    c. $x + y = 2$ dan $x + y = 3$
    d. $2x + y = 1$ dan $6x + 3y = 3$

11. Jumlah dua bilangan adalah 20. Bilangan yang satu adalah enam lebihnya dari bilangan yang lain. Hasil kali kedua bilangan tersebut adalah ....
    a. 71 c. 80
    b. 73 d. 91

12. Diketahui dua buah sudut saling berpelurus. Besar sudut yang satu adalah 15^o lebihnya dari sudut siku-siku. Selisih kedua sudut tersebut adalah ....
    a. 15^o c. 30^o
    b. 20^o d. 45^o

13. Harga 2 baju dan 1 celana adalah Rp140.000,00. Harga 3 baju dan 2 celana Rp235.000,00. Harga 4 baju dan 5 celana adalah ....
    a. Rp320.000,00
    b. Rp430.000,00
    c. Rp450.000,00
    d. Rp520.000,00

14. Hasil kali penyelesaian dari sistem persamaan $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=7$ dan $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$ adalah ....
    a. –1 c. –10
    b. 1 d. 10

15. Di antara sistem persamaan nonlinear dua variabel berikut, persamaan yang dapat diubah ke bentuk sistem persamaan linear dua variabel adalah ....
    a. $x^2 - y = 3$ dan $2x - y^2 = 1$
    b. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{1}{3}$ dan $3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=0$
    c. $\frac{x}{3}+\frac{1}{y}=4$ dan $\frac{1}{x}-\frac{y}{7}=5$
    d. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y}=3$ dan $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y-3}=15$

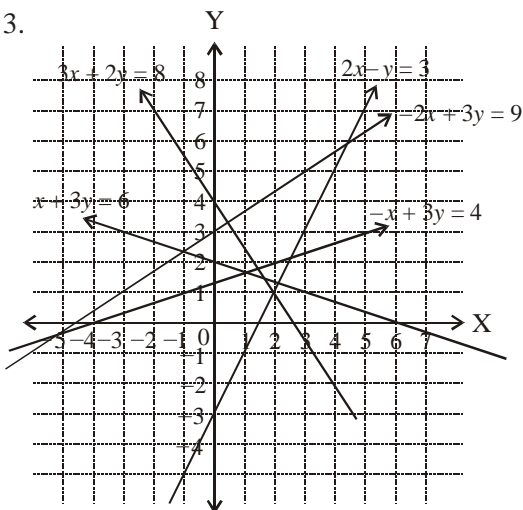
B. *Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.*

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut jika x, y variabel pada himpunan bilangan real.
   a. $2x - 3y = 18$
   b. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$
   c. $5(2x - 3) = 2(x + 3)$
   d. $\frac{2x-3}{2} - \frac{5x+6}{4} = -4$

   Kemudian gambarlah grafik dari masing-masing persamaan tersebut.

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut, jika x, y variabel pada himpunan bilangan real.
   a. $x + y = 2$ dan $2x - y = 2$
   b. $3x - y + 5 = 0$ dan $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{5}{6}$
   c. $6x + 5y - 5 = 0$ dan $-2y = 5x + 4$
   d. $\frac{2x-2}{3} + \frac{3y+1}{2} = \frac{1}{6}$ dan

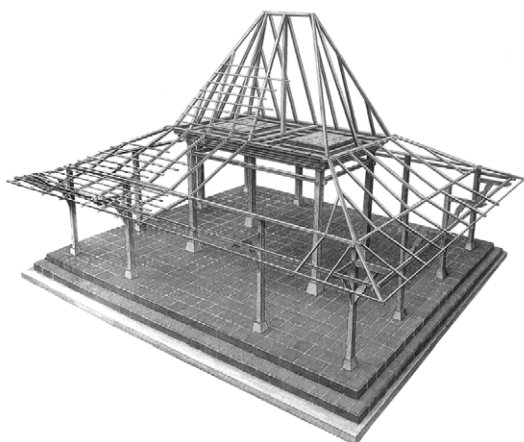
   $\frac{x+2}{3} - \frac{2y-3}{4} = 2\frac{1}{4}$

3.

Dari grafik di atas, tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut.
   a. $2x - y = 3$ dan $3x + 2y = 8$
   b. $3x + 2y = 8$ dan $-x + 3y = 4$
   c. $-x + 3y = 4$ dan $-2x + 3y = 9$
   d. $x + 3y = 6$ dan $2x - y = 3$
   e. $-2x + 3y = 9$ dan $x + 3y = 6$

4. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut.
   a. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$ dan $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$
   b. $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4$ dan $5\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
   c. $x^2 - y^2 = 1$ dan $2x^2 + y^2 = 5$
   d. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+1} = 6$ dan

   $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2y+2} = 4$

5. Jumlah umur ibu dan anaknya setahun yang lalu adalah 48 tahun. Tiga tahun kemudian umur ibu adalah 5 tahun lebihnya dari dua kali umur anaknya. Hitunglah umur ibu dan anak sekarang.

TEOREMA PYTHAGORAS

Sumber: *Indonesian Heritage,* 2002

Pernahkah kalian memerhatikan para tukang kayu atau tukang bangunan? Dalam bekerja, mereka banyak memanfaatkan teorema Pythagoras. Coba perhatikan kerangka sebuah rumah yang dibuat dari kayu. Pada kerangka rumah tersebut sebagian besar rusuk tegak lurus terhadap rusuk yang lain. Sudut-sudut yang terbentuk pada rusuk yang saling tegak lurus tersebut merupakan sudut siku-siku. Dengan memanfaatkan teorema Pythagoras, dapatkah kalian menentukan panjang dari rusuk-rusuk yang saling tegak lurus tersebut?

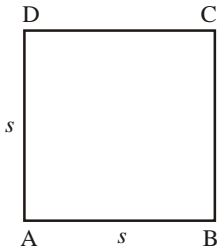
Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menemukan teorema Pythagoras;
- ❖ dapat menghitung panjang sisi segitiga siku-siku jika dua sisi lain diketahui;
- ❖ dapat menghitung perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa;
- ❖ dapat menghitung panjang diagonal pada bangun datar.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ teorema Pythagoras
- ❖ tripel Pythagoras
- ❖ segitiga siku-siku istimewa

Sebelum mempelajari materi pada bab ini, kalian harus menguasai materi mengenai segitiga, segi empat, sudut, dan bilangan kuadrat, serta akar kuadrat. Namun, sebelumnya mari kita ingat kembali mengenai luas persegi dan luas segitiga siku-siku.

A. TEOREMA PYTHAGORAS

1. Luas Persegi dan Luas Segitiga Siku-Siku

D C s A s B

Gambar 5.1

Perhatikan Gambar 5.1.

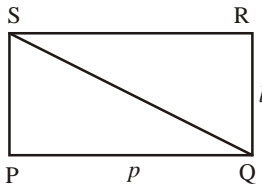
Pada gambar tersebut tampak sebuah persegi ABCD yang panjang sisinya *s* satuan panjang.

Luas persegi ABCD $= \text{sisi} \times \text{sisi}$

$$L = s \times s$$

$$L = s^2 \text{ satuan luas}$$

Selanjutnya, perhatikan Gambar 5.2.

Pada gambar tersebut tampak sebuah persegi panjang PQRS yang panjangnya *p* dan lebarnya *l* satuan. Diagonal QS membagi persegi panjang PQRS menjadi dua buah segitiga siku-siku, yaitu Δ PQS dan Δ QRS. Luas persegi panjang PQRS sama dengan jumlah luas Δ PQS dan Δ QRS. Adapun luas Δ PQS sama dengan luas Δ QRS, sehingga diperoleh

Gambar 5.2

$$\text{luas } \Delta \text{ PQS} = \text{luas } \Delta \text{ QRS}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{luas persegi panjang PQRS}$$

Karena persegi panjang PQRS berukuran panjang *p* dan lebar *l*, luas Δ PQS $= \frac{1}{2} \times p \times l$ atau

$$\text{luas segitiga siku-siku} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

Luas persegi dan luas segitiga siku-siku sangat bermanfaat dalam menemukan teorema Pythagoras.

2. Menemukan Teorema Pythagoras

Untuk menemukan teorema Pythagoras lakukan kegiatan berikut. Ambillah dua potong kertas berbentuk persegi berukuran ($b + c$) cm seperti tampak pada Gambar 5.3 (i) dan 5.3 (ii). Kita akan menemukan hubungan antara besarnya *a*, *b*, dan *c*.

Gambar 5.3 (i) menunjukkan persegi ABCD berukuran $(b + c)$ cm. Pada keempat sudutnya buatlah empat segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya b cm dan c cm.

(i)

Dari Gambar 5.3 (i) tampak bahwa luas persegi ABCD sama dengan luas persegi (luas daerah yang tidak diarsir) ditambah luas empat segitiga siku-siku (luas daerah yang diarsir), sehingga diperoleh

luas daerah yang diarsir = luas empat segitiga siku-siku

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times b \times c$$

$$= 2bc$$

dan luas daerah yang tidak diarsir = luas persegi PQRS

$$= a \times a = a^2.$$

Lalu buatlah persegi EFGH berukuran $(b + c)$ cm seperti tampak pada gambar 5.3 (ii). Pada dua buah sudutnya buatlah empat segitiga siku-siku sedemikian sehingga membentuk dua persegi panjang berukuran $(b \times c)$ cm.

(ii)

Dari Gambar 5.3 (ii) tampak bahwa luas persegi EFGH sama dengan luas persegi (luas daerah yang tidak diarsir) ditambah luas empat segitiga siku-siku (luas daerah yang diarsir), sehingga diperoleh

luas daerah yang diarsir = luas dua persegi panjang

$$= 2 \times b \times c$$

$$= 2\ bc$$

luas daerah yang tidak diarsir = luas persegi KMGN+ luas persegi OFML

$$= (b \times b) + (c \times c)$$

$$= b^2 + c^2.$$

Dari Gambar 5.3 (i) dan 5.3 (ii) tampak bahwa ukuran persegi ABCD = ukuran persegi EFGH, sehingga diperoleh

luas persegi ABCD = luas persegi EFGH

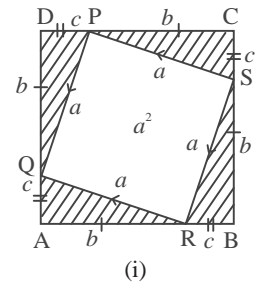
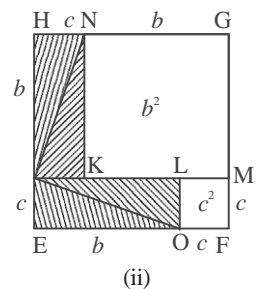
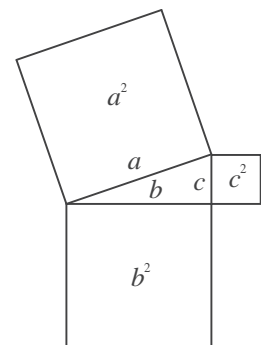
$$2bc + a^2 = 2bc + b^2 + c^2$$

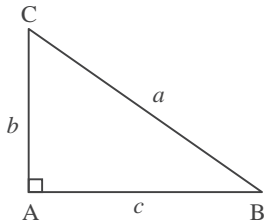
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Kesimpulan di atas jika digambarkan akan tampak seperti pada Gambar 5.3 (iii).

(iii)

Gambar 5.3

Luas daerah persegi yang panjang sisinya adalah sisi miring suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah luas daerah persegi yang panjang sisinya adalah sisi siku-siku segitiga tersebut.

Kesimpulan tersebut selanjutnya dikenal dengan teorema *Pythagoras*. Teorema Pythagoras tersebut selanjutnya dapat dirumuskan seperti berikut.

> Untuk setiap segitiga siku-siku, berlaku kuadrat panjang sisi miring sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi siku-sikunya.

Gambar 5.4

Jika ABC adalah segitiga siku-siku dengan a panjang sisi miring, sedangkan b dan c panjang sisi siku-sikunya maka berlaku

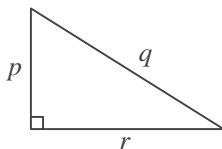
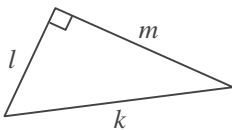
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Pernyataan di atas jika diubah ke bentuk pengurangan menjadi

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ atau}$$
$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Contoh

Nyatakan hubungan yang berlaku mengenai sisi-sisi segitiga pada gambar di bawah ini.

a.

b.

Gambar 5.5

Penyelesaian:

Karena kedua segitiga di samping adalah segitiga siku-siku, maka berlaku teorema Pythagoras, yaitu kuadrat panjang sisi miring = jumlah kuadrat sisi siku-sikunya, sehingga berlaku

a. $q^2 = p^2 + r^2$ atau $p^2 = q^2 - r^2$
$r^2 = q^2 - p^2$

b. $k^2 = l^2 + m^2$ atau $l^2 = k^2 - m^2$
$m^2 = k^2 - l^2$

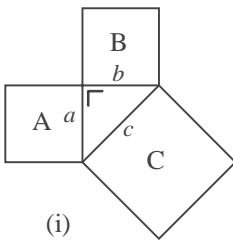
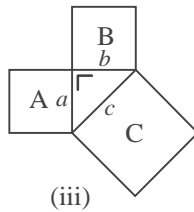
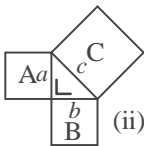
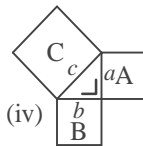
Diskusi

(Berpikir kritis)

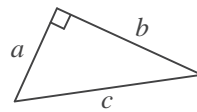
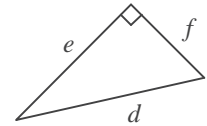
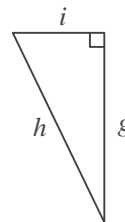
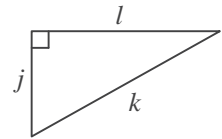
Bentuklah kelompok yang terdiri atas 2 orang, 1 pria dan 1 wanita. Buatlah empat buah segitiga siku-siku dengan ukuran yang berbeda pada kertas karton. Guntinglah segitiga-segitiga tersebut.
Ukurlah panjang sisi setiap segitiga tersebut. Lalu ujilah, apakah panjang sisi setiap segitiga tersebut memenuhi teorema Pythagoras? Ceritakan pengalamanmu secara singkat di depan kelas.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1.

Berdasarkan gambar di atas salin dan lengkapilah tabel berikut. Hubungan apakah yang tampak pada kolom luas C dan luas A + B?

Gambar	Luas Daerah Persegi			
	A	**B**	**C**	**A + B**
i				
ii				
iii				
iv				

2. Gunakan teorema Pythagoras untuk menyatakan persamaan-persamaan yang berlaku pada segitiga berikut.

3. Ukurlah panjang sisi setiap segitiga siku-siku pada soal no. 2 di atas. Cek, apakah kuadrat panjang sisi miring = kuadrat panjang kedua sisi siku-sikunya. Ujilah jawabanmu dengan jawaban soal no. 2.

3. Menggunakan Teorema Pythagoras untuk Menghitung Panjang Salah Satu Sisi Segitiga Siku-Siku jika Kedua Sisi Lain Diketahui

Dengan menggunakan teorema Pythagoras kita dapat menghitung panjang salah satu sisi segitiga siku-siku jika panjang kedua sisi lain diketahui.

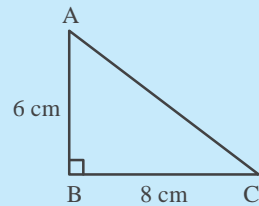
Contoh

Diketahui segitiga ABC siku-siku di B dengan AB = 6 cm dan BC = 8 cm. Hitunglah panjang AC.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema Pythagoras berlaku

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 6^2 + 8^2 \\
&= 36 + 64 \\
&= 100 \\
AC &= \sqrt{100} = 10
\end{aligned}
$$

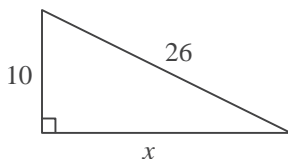
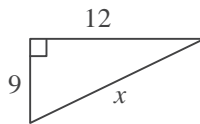
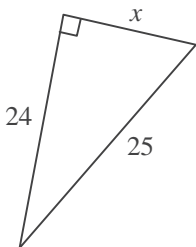
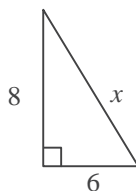
Jadi, panjang AC = 10 cm.

Gambar 5.6

Uji Kompetensi 2

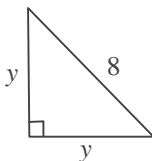
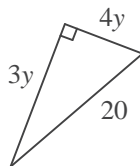
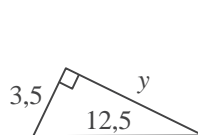
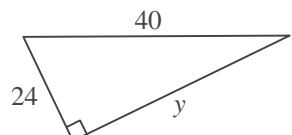
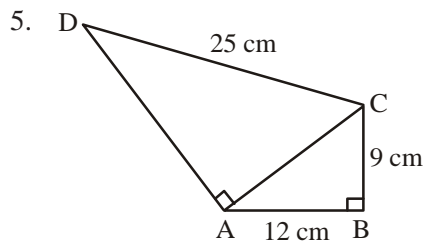
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Gunakan teorema Pythagoras untuk menghitung nilai x pada gambar berikut.

(a) (b)

(c) (d)

2. Hitunglah nilai y pada setiap segitiga berikut.

(a) (b)

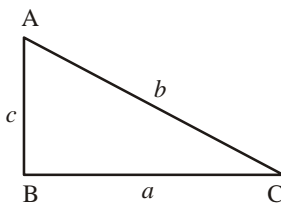
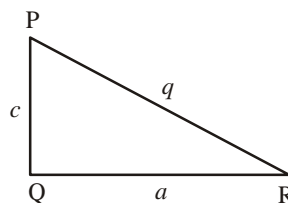
(c) (d)

3. Diketahui segitiga PQR siku-siku di P dengan PQ = 12 cm dan QR = 13 cm.
   a. Buatlah sketsa segitiga tersebut.
   b. Tentukan panjang PR.
4. Panjang hipotenusa suatu segitiga siku-siku adalah 15 cm, sedangkan panjang sisi siku-sikunya 12 cm dan x cm. Berapakah nilai x?
5.

   Pada gambar di atas, diketahui panjang AB = 12 cm, BC = 9 cm, dan CD = 25 cm. Tentukan panjang AD.

B. PENGGUNAAN TEOREMA PYTHAGORAS

1. Kebalikan Teorema Pythagoras untuk Menentukan Jenis Suatu Segitiga

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari mengenai teorema Pythagoras dan membuktikan kebenarannya. Sekarang, kita akan membuktikan bahwa kebalikan teorema Pythagoras juga berlaku. Perhatikan uraian berikut.

Perhatikan Gambar 5.7 (i). Misalkan Δ ABC dengan panjang sisi-sisinya AB = c cm, BC = a cm, dan AC = b cm sehingga berlaku $b^2 = a^2 + c^2$ .... (i).

Akan dibuktikan bahwa Δ ABC siku-siku di B.

(i)

(ii)

Gambar 5.7

Pada Gambar 5.7 (ii), Δ PQR siku-siku di Q dengan panjang PQ = c cm, QR = a cm, dan PR = q cm. Karena Δ PQR siku-siku, maka berlaku $q^2 = a^2 + c^2$ .... (ii).

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) kita peroleh

$b^2 = a^2 + c^2 = q^2$ atau $b^2 = q^2$

Karena b bernilai positif, maka $b = q$.

Jadi, Δ ABC dan Δ PQR memiliki sisi-sisi yang sama panjang. Dengan mengimpitkan sisi-sisi yang bersesuaian dari kedua segitiga, diperoleh sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Dengan demikian, $\angle$ ABC = $\angle$ PQR = 90°. Jadi, Δ ABC adalah segitiga siku-siku di B.

Kebalikan teorema Pythagoras menyatakan bahwa

> untuk setiap segitiga jika jumlah kuadrat panjang dua sisi yang saling tegak lurus sama dengan kuadrat panjang sisi miring maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku.

Agar kalian mengetahui jenis segitiga yang lain, lakukan kegiatan berikut.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2003

Gambar 5.8

Pythagoras (± 582 – 500 SM) adalah seorang tokoh yang sangat berjasa di bidang matematika. Dengan penemuannya, terutama yang menyangkut segitiga siku-siku, telah membawa manfaat yang besar di bidang apapun. Untuk mengabadikan namanya penemuannya tersebut dikenal dengan teorema Pythagoras.

KEGIATAN

a. Pada kertas berpetak, gambarlah segitiga dengan panjang sisi-sisinya 15 satuan, 20 satuan, dan 25 satuan. Apakah segitiga yang terbentuk adalah segitiga siku-siku? Bandingkan kuadrat sisi miring dengan jumlah kuadrat sisi yang lain. Apa yang dapat kalian simpulkan?

b. Pada kertas berpetak, gambarlah segitiga dengan panjang sisi-sisinya 12 satuan, 14 satuan, dan 16 satuan. Apakah yang kalian peroleh adalah segitiga lancip? Bandingkan kuadrat sisi miring dengan jumlah kuadrat sisi yang lain. Apa yang dapat kalian simpulkan?

c. Pada kertas berpetak, gambarlah segitiga dengan panjang sisi-sisinya 15 satuan, 20 satuan, dan 28 satuan. Apakah segitiga yang terbentuk adalah segitiga tumpul? Bandingkan kuadrat sisi miring dengan jumlah kuadrat sisi yang lain. Apa yang dapat kalian simpulkan?

Setelah melakukan kegiatan di atas, apakah kalian menyimpulkan seperti berikut?

Pada suatu segitiga berlaku

a. jika kuadrat sisi miring = jumlah kuadrat sisi yang lain maka segitiga tersebut siku-siku.

b. jika kuadrat sisi miring $<$ jumlah kuadrat sisi yang lain maka segitiga tersebut lancip.

c. jika kuadrat sisi miring $>$ jumlah kuadrat sisi yang lain maka segitiga tersebut tumpul.

Tentukan jenis segitiga dengan panjang sisi-sisi sebagai berikut.

a. 3 cm, 5 cm, 4 cm

b. 4 cm, 5 cm, 6 cm

c. 1 cm, 2 cm, 3 cm

Penyelesaian:

Misalkan a = panjang sisi miring, sedangkan b dan c panjang sisi yang lain, maka diperoleh

a. a = 5 cm, b = 3 cm, c = 4 cm

$a^2 = 5^2 = 25$

$b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Karena $5^2 = 3^2 + 4^2$, maka segitiga ini termasuk jenis segitiga siku-siku.

b. a = 6 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

$a^2 = 6^2 = 36$

$b^2 + c^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

Karena $6^2 < 4^2 + 5^2$, maka segitiga ini termasuk jenis segitiga lancip.

c. a = 3 cm, b = 1 cm, c = 2 cm

$a^2 = 3^2 = 9$

$b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

Karena $3^2 > 1^2 + 2^2$, maka segitiga ini termasuk jenis segitiga tumpul.

2. Tripel Pythagoras

Perhatikan kelompok tiga bilangan berikut.

a. 3, 5, 6

b. 6, 8, 10

c. 6, 8, 12

d. 4, 5, 6

e. 5, 12, 13

Misalkan bilangan-bilangan di atas merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga, dapatkah kalian menentukan manakah yang termasuk jenis segitiga siku-siku?

a. 3, 5, 6

$6^2 = 36$

$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

Karena $6^2 > 3^2 + 5^2$, maka segitiga ini *bukan* termasuk segitiga siku-siku.

b. 6, 8, 10

$10^2 = 100$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Karena $10^2 = 6^2 + 8^2$, maka segitiga ini termasuk segitiga siku-siku.

c. 6, 8, 12

$12^2 = 144$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Karena $12^2 > 6^2 + 8^2$, maka segitiga ini *bukan* termasuk segitiga siku-siku.

d. 4, 5, 6

$6^2 = 36$

$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

Karena $6^2 < 4^2 + 5^2$, maka segitiga ini *bukan* termasuk segitiga siku-siku.

e. 5, 12, 13

$13^2 = 169$

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

(Menumbuhkan kreativitas)

Amati lingkungan di sekitarmu.
Temukan penggunaan teorema Pythagoras dalam kehidupan sehari-hari. Ceritakan temuanmu secara singkat di depan kelas.

(Berpikir kritis)

Amatilah benda-benda di lingkungan sekitarmu.
Sediakan 5 buah benda yang permukaannya mempunyai sudut siku-siku. Ukurlah panjang kedua sisi siku-siku dan sisi miring benda-benda tersebut, sehingga diperoleh kelompok tiga bilangan.
Tunjukkan apakah ketiga bilangan tersebut merupakan tripel Pythagoras. Ceritakan hasilnya secara singkat di depan kelas.

Jika tiga bilangan bulat *a*, *b*, c merupakan tripel Pythagoras maka *na*, *nb*, dan *nc* juga membentuk tripel Pythagoras, dengan *n* bilangan real. Dapatkah kalian membuktikan pernyataan tersebut?

Karena $13^2 = 5^2 + 12^2$, maka segitiga ini termasuk jenis segitiga siku-siku.

Dari uraian di atas tampak bahwa kelompok tiga bilangan 6, 8, 10 dan 5, 12, 13 merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku, karena memenuhi teorema Pythagoras.

Selanjutnya, kelompok tiga bilangan tersebut disebut *tripel Pythagoras*.

Tripel Pythagoras adalah kelompok tiga bilangan bulat positif yang memenuhi kuadrat bilangan terbesar sama dengan jumlah kuadrat dua bilangan lainnya.

Uji Kompetensi 3

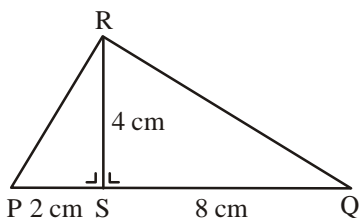
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Selidiki jenis segitiga dengan panjang sisi-sisi berikut.
   a. 5, 8, 10
   b. 7, 8, 9
   c. 9, 12, 15
   d. 13, 5, 12
   e. 8, 15, 17
   f. 7, 24, 25
   g. 12, 16, 20
   h. 28, 45, 53
2. Di antara kelompok tiga bilangan berikut ini, manakah yang membentuk tripel Pythagoras?
   a. 3, 4, 5
   b. 4, 5, 6
   c. 4, 7, 8
   d. 12, 16, 20
   e. 8, 15, 17
   f. 12, 15, 19
   g. 11, 60, 62
   h. 33, 56, 65
3. Salin dan lengkapilah tabel berikut, sehingga menunjukkan kelompok bilangan tripel Pythagoras, dengan $a > b$.

a	b	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$	Tripel Pythagoras
2	1	3	4	5	3, 4, 5
3	1				
3	2				

a	b	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$	Tripel Pythagoras
4	1				
4	2				
4	3				
5	1				
5	2				
5	3				
5	4				

   Apa yang dapat kalian simpulkan dari tabel di atas?
4. Pada segitiga ABC diketahui AB = 10 cm, BC = 24 cm, dan AC = 26 cm.
   a. Tunjukkan bahwa Δ ABC siku-siku.
   b. Di titik manakah $\angle$ ABC siku-siku?

5.

Perhatikan gambar di atas.

Pada Δ PQR diketahui PS = 2 cm, QS = 8 cm, dan RS = 4 cm.

a. Hitunglah panjang PR dan QR.

b. Buktikan bahwa Δ PQR siku-siku di titik R.

3. Perbandingan Sisi-Sisi pada Segitiga Siku-Siku dengan Sudut Khusus

a. Sudut 30^0 dan 60^0

Perhatikan Gambar 5.9.

Gambar 5.9

Segitiga ABC di samping adalah segitiga sama sisi dengan AB = BC = AC = $2x$ cm dan ∠ A = ∠ B = ∠ C = 60^0.

Karena CD tegak lurus AB, maka CD merupakan garis tinggi sekaligus garis bagi ∠ C, sehingga

∠ ACD = ∠ BCD = 30^o.

Diketahui ∠ ADC = ∠ BDC = 90^o.

Titik D adalah titik tengah AB, di mana AB = $2x$ cm, sehingga panjang BD = x cm.

Perhatikan Δ CBD.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{(2x)^2 - x^2}$$

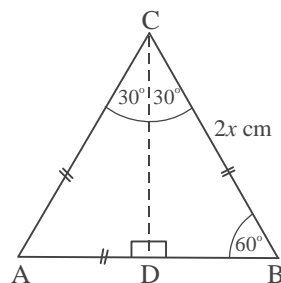
$$= \sqrt{4x^2 - x^2}$$

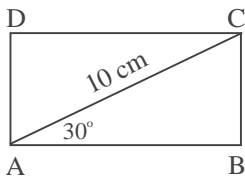
$$= \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$$

Dengan demikian, diperoleh perbandingan

$$BD : CD : BC = x : x\sqrt{3} : 2x$$

$$= 1 : \sqrt{3} : 2.$$

Perbandingan tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan segitiga siku-siku khusus. Perhatikan contoh berikut.

Diketahui persegi panjang ABCD dengan panjang diagonal AC = 10 cm dan $\angle$ CAB = 30°. Tentukan

(i) panjang AB;
(ii) panjang BC;
(iii) luas ABCD;
(iv) keliling ABCD.

Gambar 5.10

Penyelesaian:

Perbandingan sisi-sisi pada Δ ABC adalah

BC : AB : AC = 1 : $\sqrt{3}$: 2, sehingga

(i) BC : AB : AC = 1 : $\sqrt{3}$: 2

$$AB : AC = \sqrt{3} : 2$$
$$AB : 10 = \sqrt{3} : 2$$
$$2AB = 10\sqrt{3}$$
$$AB = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

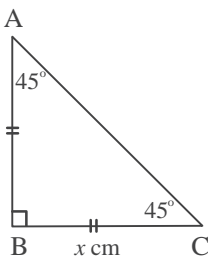
(ii)
$$BC : AC = 1 : 2$$
$$BC : 10 = 1 : 2$$
$$2BC = 10$$
$$BC = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

(iii)
$$\text{Luas ABCD} = AB \times BC = 5\sqrt{3} \times 5 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(iv)
$$\text{Keliling ABCD} = 2(AB \times BC) = 2(5\sqrt{3} + 5) = 10(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

b. *Sudut 45°*

Perhatikan Gambar 5.11.

Segitiga ABC pada Gambar 5.11 adalah segitiga siku-siku sama kaki. Sudut B siku-siku dengan panjang AB = BC = x cm dan $\angle$ A = $\angle$ C = 45°.

Gambar 5.11

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + x^2}$$

$$= \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

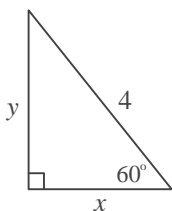
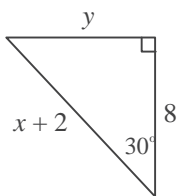
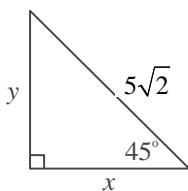
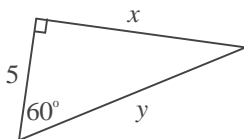
Dengan demikian, diperoleh perbandingan

$$AB : BC : AC = x : x : x\sqrt{2}$$

$$= 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

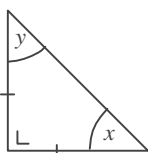
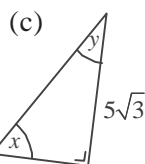
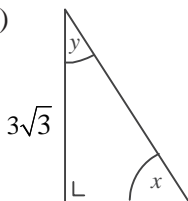
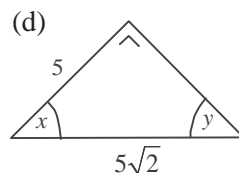
1. Tentukan nilai x dan y pada segitiga siku-siku berikut.

(a)

(b)

(c) (d)

2. Tentukan besar sudut x dan y (dalam derajat) pada segitiga siku-siku berikut.

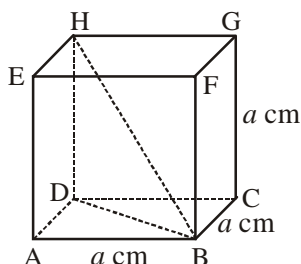
(a)

(b)

(c)

(d)

3. Diketahui Δ PQR siku-siku di Q dengan panjang PQ = QR = 25 cm. Hitunglah keliling dan luas segitiga PQR.
4. Pada persegi panjang ABCD, diketahui AB = 30 cm dan ∠ CAB = 30°. Hitunglah
   a. panjang AC dan BC;
   b. keliling dan luas persegi panjang ABCD.
5. Diketahui belah ketupat PQRS dengan O titik potong diagonal PR dan QS. Jika ∠ OPS = 30^0 dan PO = $10\sqrt{3}$ cm maka
   a. sketsalah belah ketupat PQRS;
   b. hitunglah panjang QO dan PQ;
   c. hitung luas dan keliling belah ketupat PQRS.

4. Penggunaan Teorema Pythagoras pada Bangun Datar dan Bangun Ruang

Selain dimanfaatkan pada segitiga siku-siku, teorema Pythagoras juga dapat digunakan pada bangun datar dan bangun ruang matematika yang lain untuk mencari panjang sisi-sisi yang belum diketahui.

Gambar 5.12

Perhatikan kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk *a* cm pada Gambar 5.12. Dapatkah kalian menyebutkan diagonal sisi kubus ABCD.EFGH? Diagonal sisi adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan pada suatu bidang datar. Diagonal sisi kubus tersebut antara lain $\overline{AF}$, $\overline{BD}$, $\overline{CH}$, dan $\overline{DE}$. Misalkan kita akan menentukan panjang diagonal sisi $\overline{BD}$.

Perhatikan persegi ABCD. $\overline{BD}$ adalah salah satu diagonal sisi bidang ABCD. Sekarang, perhatikan Δ ABD. Karena Δ ABD siku-siku di A, maka dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 \\ &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ \overline{BD} &= \sqrt{2a^2} \\ &= a\sqrt{2} \text{ cm}\end{aligned}$$

Coba tentukan panjang diagonal sisi yang lain.

Apakah panjangnya selalu sama?

Selanjutnya, dapatkah kalian menyebutkan diagonal ruang kubus ABCD.EFGH? Diagonal ruang adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu bangun ruang.

Diagonal ruang kubus ABCD.EFGH antara lain $\overline{HB}$ dan $\overline{FD}$. Perhatikan Δ BDH siku-siku di titik D, maka untuk menentukan panjang diagonal ruang $\overline{HB}$ dapat dicari dengan menggunakan teorema Pythagoras.

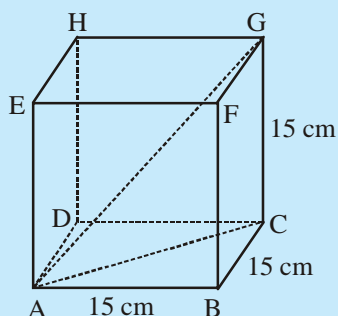
$$\begin{aligned}\overline{HB}^2 &= \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2 \\ &= \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \\ &= 2a^2 + a^2 \\ &= 3a^2 \\ \overline{HB} &= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \text{ cm}\end{aligned}$$

Tugas Mandiri

(Berpikir kritis)

Pada bangun ruang balok dengan panjang *p* cm, lebar *l* cm, dan tinggi *t* cm, tentukan panjang diagonal sisi dan panjang diagonal ruangnya.

Diketahui kubus ABCD. EFGH dengan panjang AB = 15 cm. Hitunglah panjang diagonal ruang $\overline{AG}$.

Penyelesaian:

Gambar 5.13

Perhatikan Δ ACG.
Karena Δ ACG siku-siku di titik C, maka panjang diagonal ruang $\overline{AG}$ dapat dicari dengan rumus berikut.

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2.$$

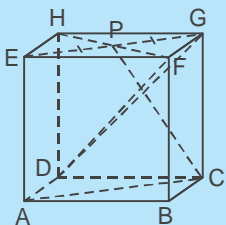
Panjang diagonal sisi $\overline{AC}$ adalah

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2\\ &= 15^2 + 15^2\\ &= 225 + 225\\ &= 450\\ \overline{AC} &= \sqrt{450} = 15\sqrt{2}\ \text{cm.}\end{aligned}$$

Jadi, panjang diagonal ruang $\overline{AG}$ adalah

$$\begin{aligned}\overline{AG}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2.\\ &= \left(15\sqrt{2}\right)^2 + 15^2\\ &= 450 + 225\\ &= 675 = 15\sqrt{3}\ \text{cm}.\end{aligned}$$

(Berpikir kritis)
Perhatikan bangun ruang-bangun ruang lain selain kubus dan balok.
Temukan pemanfaatan teorema Pythagoras pada masing-masing bangun tersebut. Hasilnya, tulislah dalam bentuk laporan dan kumpulkan kepada gurumu.

Soal Tantangan

Pada kubus ABCD.EFGH di samping, diketahui panjang $\overline{AB}$ = 4 cm. Hitunglah

a. panjang $\overline{AC}$ dan $\overline{AG}$;

b. panjang $\overline{CP}$;

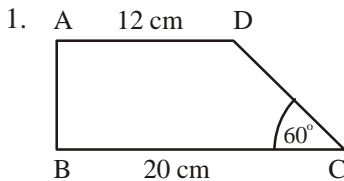
c. luas bidang diagonal ACGE.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

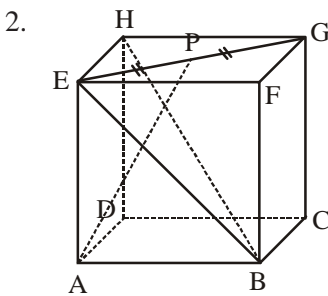
1. A 12 cm D

   60°

   B 20 cm C

   Pada trapesium ABCD di atas, hitunglah

   a. panjang $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$;

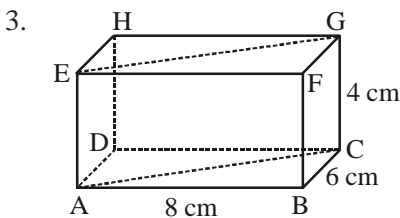
   b. luas trapesium.

2.

   Pada kubus ABCD.EFGH di atas diketahui panjang diagonal sisi BE = $\sqrt{48}$ cm. Tentukan

   a. panjang $\overline{AB}$;

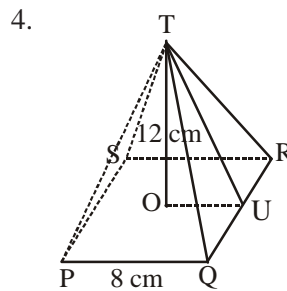
   b. panjang $\overline{HB}$;

   c. panjang $\overline{AP}$.

3.

   Pada gambar di atas balok ABCD.EFGH dengan sisi alas ABCD dan sisi atas EFGH. Panjang rusuk $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{BC}$ = 6 cm, dan $\overline{CG}$ = 4 cm. Hitunglah

   a. luas dan keliling bidang ACGE;

   b. panjang diagonal ruang $\overline{AG}$.

4.

   Pada limas T.PQRS di atas, alas limas berbentuk persegi dengan panjang sisi 8 cm, sedangkan panjang $\overline{TO}$ = 12 cm. Hitunglah

   a. panjang $\overline{TU}$;

   b. keliling dan luas segitiga TQR.

5. Diketahui persegi ABCD pada bidang koordinat dengan koordinat titik A (2, 1) dan C (7, –4).

   a. Sketsalah persegi ABCD tersebut pada bidang koordinat.

   b. Tentukan koordinat titik B dan D.

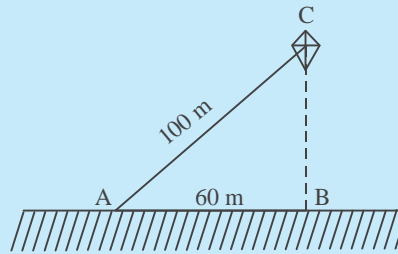
   c. Tentukan panjang $\overline{BC}$ dan $\overline{AC}$.

C. MENYELESAIKAN MASALAH SEHARI-HARI DENGAN MENGGUNAKAN TEOREMA PYTHAGORAS

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang disajikan dalam soal cerita dan dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Pythagoras. Untuk memudahkan menyelesaikannya diperlukan bantuan gambar (sketsa). Pelajari contoh berikut.

Contoh

Seorang anak menaikkan layang-layang dengan benang yang panjangnya 100 meter. Jarak anak di tanah dengan titik yang tepat berada di bawah layang-layang adalah 60 meter. Hitunglah ketinggian layang-layang.

Penyelesaian:

Gambar 5.14

Tinggi layang-layang = BC

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$
$$= \sqrt{100^2 - 60^2}$$
$$= \sqrt{10.000 - 3600}$$
$$= \sqrt{6400}$$
$$= 80 \text{ m}$$

Jadi, tinggi layang-layang adalah 80 m.

Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 150 km, kemudian ke arah selatan sejauh 200 km. Hitung jarak kapal sekarang dari tempat semula.
2. Sebuah tangga yang panjangnya 12 m bersandar pada tembok yang tingginya 8 m. Jika kaki tangga terletak 6 m dari tembok maka hitunglah panjang bagian tangga yang tersisa di atas tembok.
3. Seseorang menyeberangi sungai yang lebarnya 30 meter. Jika ia terbawa arus sejauh 16 meter, berapakah jarak yang ia tempuh pada saat menyeberangi sungai?
4. Dua buah tiang berdampingan berjarak 24 m. Jika tinggi tiang masing-masing adalah 22 m dan 12 m, hitunglah panjang kawat penghubung antara ujung tiang tersebut.
5. Sebidang sawah berbentuk persegi panjang berukuran (40×9) m. Sepanjang keliling dan kedua diagonalnya akan dibuat pagar dengan biaya Rp25.000,00 per meter. Hitunglah
   a. panjang pagar;
   b. biaya pembuatan pagar.

Rangkuman

1. Luas persegi yang panjang sisinya *s* satuan panjang adalah s^2 satuan luas.
2. Luas segitiga siku-siku dengan panjang alas *a* dan tinggi *t* adalah

   $L = \frac{1}{2} \times a \times t$.
3. Untuk setiap segitiga siku-siku berlaku kuadrat panjang sisi miring sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi siku-sikunya.
4. Jika jumlah kuadrat panjang dua sisinya sama dengan kuadrat panjang sisi miring maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku.
5. Tripel Pythagoras adalah kelompok tiga bilangan bulat positif yang memenuhi kuadrat bilangan terbesar sama dengan jumlah kuadrat dua bilangan lainnya.

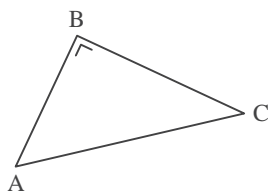
Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, apakah kalian sudah paham mengenai *teorema Pythagoras*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi ini dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Tuliskan pula manfaat apa saja yang dapat kamu peroleh dari bab ini.

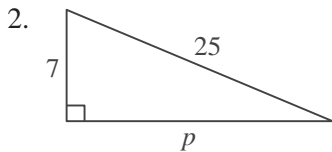
Evaluasi 5

Kerjakan di buku tugasmu.

A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1.

   Pada segitiga ABC di samping berlaku ....

   a. $AB^2 = AC^2 + BC^2$
   b. $AB^2 = AC^2 - BC^2$
   c. $AC^2 = AB^2 - BC^2$
   d. $AC^2 = BC^2 - AB^2$

2.

Nilai p pada segitiga di atas adalah ....

a. 12 c. 22
b. 15 d. 24

3. Diketahui sebuah segitiga siku-siku, panjang hipotenusanya $3\sqrt{10}$ cm dan panjang salah satu sisinya 3 cm. Panjang sisi siku-siku yang lain adalah ....

a. 7 cm c. 10 cm
b. 9 cm d. 15 cm

4. Suatu segitiga dengan panjang sisi 4 cm, 5 cm, dan $\sqrt{41}$ cm, termasuk jenis segitiga ....

a. lancip c. siku-siku
b. sebarang d. tumpul

5. Pada sebuah segitiga ABC diketahui sisi-sisinya adalah a, b, dan c. Dari pernyataan berikut yang benar adalah ....

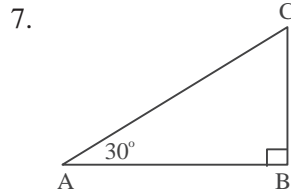
a. Jika $b^2 = a^2 + c^2$ maka $\angle$ A = 90º.
b. Jika $c^2 = b^2 - a^2$ maka $\angle$ C = 90º.
c. Jika $c^2 = a^2 - b^2$ maka $\angle$ B = 90º.
d. Jika $a^2 = b^2 + c^2$ maka $\angle$ A = 90º.

6. Diketahui himpunan panjang sisi-sisi segitiga sebagai berikut.

(i) $\{3, 4, 6\}$
(ii) $\{\sqrt{3}, \sqrt{3}, 9\}$
(iii) $\{6, 8, 9\}$
(iv) $\{\sqrt{5}, 7, \sqrt{40}\}$

Dari himpunan-himpunan di atas, yang dapat membentuk segitiga siku-siku adalah ....

a. (i) c. (iii)
b. (ii) d. (iv)

7.

Pada Δ ABC di atas, jika besar $\angle$ A = 30º dan panjang AB = $5\sqrt{3}$ cm maka panjang BC dan AC berturut-turut adalah ....

a. 5 cm dan 10 cm
b. 3 cm dan 6 cm
c. 6 cm dan 12 cm
d. 10 cm dan 20 cm

8. Jika x, 61, 11 merupakan tripel Pythagoras dan 61 bilangan terbesar maka nilai x adalah ....

a. 15 c. 45
b. 30 d. 60

9. Bilangan berikut yang *bukan* merupakan tripel Pythagoras adalah ....

a. 3, 4, 5 c. 4, 6, 9
b. 12, 16, 20 d. 10, 24, 26

10. Panjang diagonal ruang kubus dengan panjang rusuk 12 cm adalah ....

a. 13 cm c. $12\sqrt{3}$ cm
b. 13,5 cm d. $12\sqrt{5}$ cm

11. Diketahui segitiga-segitiga dengan ukuran-ukuran sebagai berikut.

(i) 3 cm, 4 cm, 5 cm
(ii) 3 cm, 5 cm, 6 cm
(iii) 5 cm, 6 cm, 7 cm
(iv) 5 cm, 8 cm, 10 cm

Berdasarkan ukuran-ukuran tersebut yang dapat membentuk segitiga tumpul adalah ....

a. (i) dan (ii) c. (ii) dan (iii)
b. (i) dan (iii) d. (ii) dan (iv)

12. Panjang sisi siku-siku suatu segitiga adalah $4x$ cm dan $3x$ cm. Jika panjang sisi hipotenusanya 35 cm, keliling segitiga tersebut adalah ....

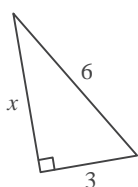
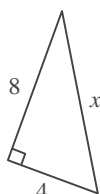
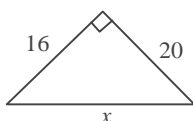
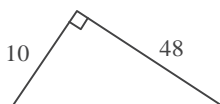
a. 68 cm c. 84 cm
b. 72 cm d. 96 cm

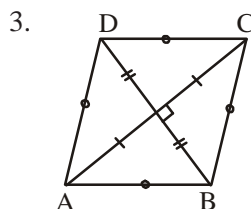
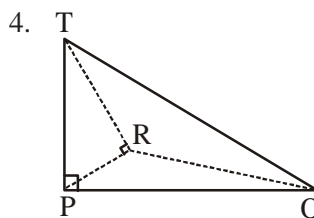
13. Sebuah persegi panjang berukuran panjang 24 cm dan panjang diagonalnya 30 cm. Luas persegi panjang tersebut adalah ....
a. 216 cm^2 c. 432 cm^2
b. 360 cm^2 d. 720 cm^2

14. Segitiga ABC siku-siku sama kaki dengan panjang AB = AC dan BC = 24 cm. Panjang AB adalah ....
a. 4,9 cm c. 8,5 cm
b. 6,9 cm d. 16,9 cm

15. Sebuah tangga yang panjangnya 6 cm bersandar pada sebuah tiang listrik. Jarak ujung bawah tangga terhadap tiang listrik adalah 3 m. Tinggi tiang listrik yang dapat dicapai tangga adalah ....
a. 3,5 cm c. $\sqrt{27}$ cm
b. $\sqrt{18}$ cm d. $\sqrt{45}$ cm

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

1. Pada gambar segitiga berikut hitunglah nilai x.

(a)

(b)

(c)

(d)

2. Nyatakan segitiga-segitiga berikut, lancip, siku-siku, atau tumpul. Jika merupakan segitiga siku-siku, lancip, atau tumpul, tentukan nama titik sudut yang siku-siku, lancip, atau tumpul.
a. Δ ABC, AB = 16 cm, BC = 30 cm, dan AC = 34 cm.
b. Δ PQR, PQ = 12 cm, QR = 10 cm, dan PR = 8 cm.
c. Δ KLM, KL = 15 cm, LM = 12 cm, dan KM = 8 cm.
d. Δ DEF dengan koordinat titik A(1, 1), B(5, 3), dan C(4, 8).
(Petunjuk: Terlebih dahulu hitunglah panjang AB, AC, dan BC).

Keliling belah ketupat ABCD di atas adalah 60 cm dan panjang BD = 18 cm. Hitunglah panjang AC.

Pada limas T.PQR di atas, diketahui panjang QR = 20 cm, PQ = 16 cm, dan TR = 28 cm.
a. Hitunglah panjang PR dan PT.
b. Tunjukkan bahwa Δ TPQ siku-siku di Q. Kemudian, hitunglah panjang QT.

5. Sebuah kapal berlayar dari Pelabuhan A ke arah selatan menuju Pelabuhan B sejauh 250 km. Kemudian, dilanjutkan ke arah timur menuju Pelabuhan C sejauh 300 km.
a. Buatlah sketsa dari keterangan di atas.
b. Berapakah jarak dari Pelabuhan A ke Pelabuhan D?

BAB 6 LINGKARAN

Sumber: *Jendela Iptek*, 2001

Sejak zaman Babilonia, manusia sudah terkagum-kagum oleh bangun matematika yang dinilai sebagai bentuk yang sempurna, yaitu lingkaran. Kita semua pasti tidak asing lagi dengan beragam lingkaran. Lingkaran terjadi secara alami di alam semesta, mulai dari riak air sampai lingkar cahaya bulan. Di alam, lingkaran sering kali terbentuk apabila permukaan datar dipengaruhi oleh suatu gaya yang bekerja merata ke segala arah. Misalnya, saat sebuah kelereng jatuh ke dalam air dan menghasilkan gelombang yang menyebar rata ke segala arah sebagai serangkaian riak yang berbentuk lingkaran.

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menyebutkan unsur-unsur dan bagian-bagian lingkaran;
- ❖ dapat menemukan nilai *phi*;
- ❖ dapat menentukan rumus serta menghitung keliling dan luas lingkaran;
- ❖ dapat mengenal hubungan sudut pusat dan sudut keliling jika menghadap busur yang sama;
- ❖ dapat menentukan besar sudut keliling jika menghadap diameter dan busur yang sama;
- ❖ dapat menentukan panjang busur, luas juring, dan luas tembereng;
- ❖ dapat menggunakan hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring dalam pemecahan masalah.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ unsur-unsur lingkaran
- ❖ keliling dan luas lingkaran
- ❖ sudut pusat dan sudut keliling
- ❖ panjang busur, luas juring, dan luas tembereng

Di tingkat sekolah dasar, kalian telah diperkenalkan dengan bangun lingkaran. Coba kalian ingat kembali materi tersebut.

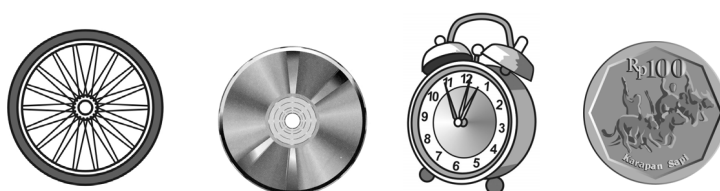
Agar kalian mudah memahami materi pada bab ini, kalian harus menguasai mengenai sudut, segitiga, dan faktorisasi suku aljabar.

(Menumbuhkan kreativitas)

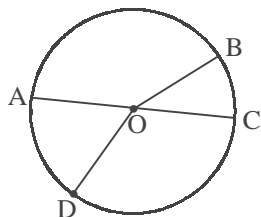
Perhatikan lingkungan di sekitarmu. Temukan 5 buah benda berbentuk lingkaran. Rabalah permukaan benda-benda tersebut. Menurutmu, unsur-unsur apa sajakah yang menyusun sebuah lingkaran? Ceritakan temuanmu secara singkat di depan kelas.

A. LINGKARAN DAN BAGIAN-BAGIANNYA

1. Pengertian Lingkaran

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering melihat benda-benda yang permukaannya berbentuk lingkaran, seperti tampak pada Gambar 6.1 berikut.

Gambar 6.1

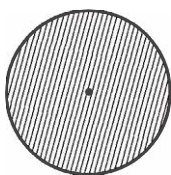
Dari Gambar 6.1 di atas, apakah yang dapat kalian ceritakan mengenai lingkaran? Dapatkah kalian menyebutkan unsur-unsur lingkaran?

Agar kalian memahami pengertian lingkaran, perhatikan Gambar 6.2 di samping.

Gambar 6.2

Lingkaran adalah kurva tertutup sederhana yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama tersebut disebut *jari-jari* lingkaran dan titik tertentu disebut *pusat lingkaran*.

Gambar 6.2 di samping menunjukkan titik A, B, C, dan D yang terletak pada kurva tertutup sederhana sedemikian sehingga $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ = jari-jari lingkaran (r). Titik O disebut pusat lingkaran.

Gambar 6.3

Selanjutnya, perhatikan Gambar 6.3 di samping.

Panjang garis lengkung yang tercetak tebal yang berbentuk lingkaran tersebut disebut *keliling lingkaran*, sedangkan daerah arsiran di dalamnya disebut *bidang lingkaran* atau *luas lingkaran*.

2. Bagian-Bagian Lingkaran

Perhatikan Gambar 6.4 di samping agar kalian mudah memahami mengenai unsur-unsur lingkaran.

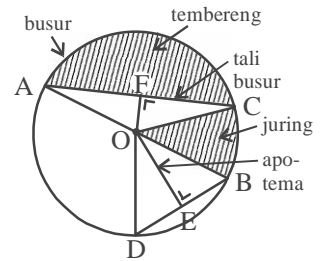
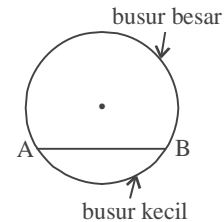
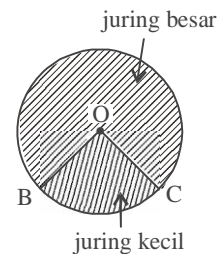
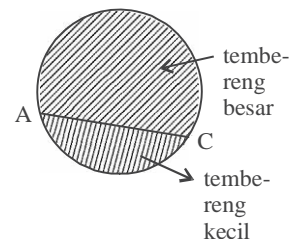
Gambar 6.4

- Titik O disebut titik pusat lingkaran.
- $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, dan $\overline{OD}$ disebut jari-jari lingkaran, yaitu garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dan titik pada keliling lingkaran.
- $\overline{AB}$ disebut *garis tengah* atau *diameter*, yaitu ruas garis yang menghubungkan dua titik pada keliling lingkaran dan melalui pusat lingkaran. Karena diameter $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$, di mana $\overline{AO} = \overline{OB}$ = jari-jari (r) lingkaran, sehingga diameter (d) = 2 $\times$ jari-jari (r) atau $d = 2r$.
- $\overline{AC}$ disebut *tali busur*, yaitu ruas garis yang menghubungkan dua titik pada keliling lingkaran.
- $\overline{OE} \perp$ tali busur $\overline{BD}$ dan $\overline{OF} \perp$ tali busur $\overline{AC}$ disebut *apotema*, yaitu jarak terpendek antara tali busur dan pusat lingkaran.

Gambar 6.5

- Garis lengkung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$, dan $\overset{\frown}{AB}$ disebut *busur lingkaran*, yaitu bagian dari keliling lingkaran. Busur terbagi menjadi dua, yaitu busur besar dan busur kecil (Gambar 6.5).
  1. *Busur kecil/pendek* adalah busur AB yang panjangnya kurang dari setengah keliling lingkaran.
  2. *Busur besar/panjang* adalah busur AB yang lebih dari setengah keliling lingkaran.

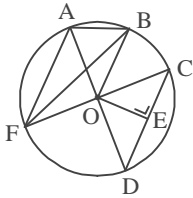
Gambar 6.6

- Daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari, $\overline{OC}$ dan $\overline{OB}$ serta busur BC disebut *juring* atau *sektor*. Juring terbagi menjadi dua, yaitu juring besar dan juring kecil (Gambar 6.6).
- Daerah yang dibatasi oleh tali busur $\overline{AC}$ dan busurnya disebut *tembereng*. Gambar 6.7 menunjukkan bahwa terdapat tembereng kecil dan tembereng besar.

Gambar 6.7

(Menumbuhkan inovasi)

Sediakan sebuah jam weker. Anggaplah titik pertemuan antara jarum menit dan jarum detik sebagai titik pusat lingkaran. Tunjukkan unsur-unsur lingkaran dengan menggunakan jam weker tersebut. Ceritakan secara singkat di depan kelas.

Uji Kompetensi 1

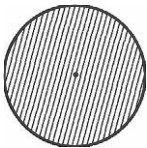
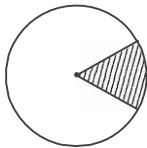
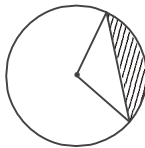
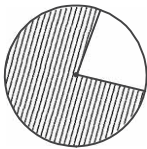
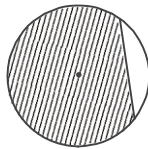
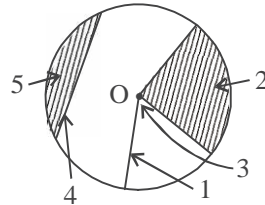
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Pada gambar di bawah ini sebutkan garis yang merupakan

   a. jari-jari,

   b. garis tengah,

   c. tali busur,

   d. apotema.

2. Disebut apakah daerah arsiran yang ditunjukkan pada gambar berikut?

3. Sebutkan nama unsur-unsur lingkaran yang ditunjukkan oleh nomor 1, 2, 3, 4, dan 5 pada gambar di bawah ini.

4. Benar atau salahkah pernyataan berikut?

   a. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik tertentu.

   b. Jari-jari suatu lingkaran saling berpotongan di satu titik.

   c. Garis tengah merupakan tali busur yang terpanjang.

   d. Tembereng adalah daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan tali busur.

B. KELILING DAN LUAS LINGKARAN

Pernahkah kamu mengamati gerak sebuah roda sepeda? Untuk mengetahui pengertian keliling lingkaran, coba kamu ambil roda sebuah sepeda. Tandai pada bagian tepi lingkaran dengan huruf A. Kemudian, gelindingkan roda tersebut dimulai dari titik A kembali ke titik A lagi. Lintasan yang dilalui roda dari A sampai kembali ke A lagi disebut satu putaran penuh atau satu keliling lingkaran. Sebelum kita menghitung keliling lingkaran, kita akan mencoba menemukan nilai π (pi).

1. Menemukan Pendekatan Nilai π (pi)

Lakukan kegiatan berikut ini, untuk menemukan pendekatan nilai π (pi).

KEGIATAN

a. Buatlah lingkaran dengan jari- jari 1 cm, 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm, dan 3 cm.
b. Ukurlah diameter masing-masing lingkaran dengan menggunakan penggaris.
c. Ukurlah keliling masing-masing lingkaran menggunakan bantuan benang dengan cara menempelkan benang pada bagian tepi lingkaran, dan kemudian panjang benang diukur menggunakan penggaris.
d. Buatlah tabel seperti di bawah ini dan hasil pengukuran yang telah kamu peroleh isikan pada tabel tersebut.

Lingkaran	Diameter	Keliling	$\frac{\textbf{Keliling}}{\textbf{Diameter}}$
Berjari-jari 1 cm	....	....	....
Berjari-jari 1,5 cm	....	....	....
Berjari-jari 2 cm	....	....	....
Berjari-jari 2,5 cm	....	....	....
Berjari-jari 3 cm	....	....	....

Coba bandingkan hasil yang kalian peroleh dengan hasil yang diperoleh teman-temanmu. Apa yang dapat kalian simpulkan?

Apakah kamu mendapatkan nilai perbandingan antara keliling dan diameter untuk setiap lingkaran adalah sama (tetap)?

Jika kegiatan tersebut kalian lakukan dengan cermat dan teliti maka nilai $\frac{keliling}{diameter}$ akan memberikan nilai yang mendekati 3,14.

Untuk selanjutnya, nilai $\frac{keliling}{diameter}$ disebut sebagai *konstanta* π (π dibaca: pi).

$$\frac{Keliling}{Diameter} = \pi$$

Coba tekan tombol π pada kalkulator. Apakah kalian mendapatkan bilangan desimal tak berhingga dan tak berulang? Bentuk desimal yang tak berhingga dan tak berulang bukan bilangan pecahan. Oleh karena itu, π bukan bilangan pecahan, namun *bilangan irasional*, yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan

(Menumbuhkan kreativitas)

Dengan adanya teknologi komputer, nilai π dapat dicari sampai puluhan tempat desimal.
Coba carilah nilai π dengan menggunakan komputer di sekolahmu. Mintalah petunjuk gurumu.
Ceritakan pengalamanmu secara singkat di depan kelas.

Untuk memudahkan dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan jari-jari atau diameter lingkaran, gunakan

- $\pi = \frac{22}{7}$, jika jari-jari atau diameternya kelipatan 7;
- π = 3,14 jika jari-jari atau diameternya bukan kelipatan 7.

dalam bentuk pecahan biasa $\frac{a}{b}$. Bilangan irasional berupa desimal tak berulang dan tak berhingga.

Menurut penelitian yang cermat ternyata nilai π = 3,14 1592 6535 8979324836 ...

Jadi, nilai π hanyalah suatu pendekatan.

Jika dalam suatu perhitungan hanya memerlukan ketelitian sampai dua tempat desimal, pendekatan untuk π adalah 3, 14.

Coba bandingkan nilai π dengan pecahan $\frac{22}{7}$. Bilangan pecahan $\frac{22}{7}$ jika dinyatakan dalam pecahan desimal adalah 3,142857143. Jadi, bilangan $\frac{22}{7}$ dapat dipakai sebagai pendekatan untuk nilai π.

$$\pi = 3{,}14 \text{ atau } \frac{22}{7}$$

2. Menghitung Keliling Lingkaran

Pada pembahasan di bagian depan diperoleh bahwa pada setiap lingkaran nilai perbandingan $\frac{keliling \quad (\text{K})}{diameter \quad (d)}$ menunjukkan bilangan yang sama atau tetap disebut π.

Karena $\frac{\text{K}}{d} = \pi$, sehingga didapat K = πd.

Karena panjang diameter adalah 2 × jari-jari atau $d = 2r$, maka K = $2\pi r$.

Jadi, didapat rumus keliling (K) lingkaran dengan diameter (d) atau jari-jari (r) adalah

$$\text{K} = \pi d \quad \text{atau} \quad \text{K} = 2\pi r$$

Contoh

Hitunglah keliling lingkaran jika diketahui
a. diameter 14 cm;
b. jari-jari 35 cm.

Penyelesaian:

a. d = 14 cm sehingga $K = \pi d$

$$= \frac{22}{7} \times 14$$
$$= 44$$

Jadi, keliling lingkaran adalah 44 cm.

b. r = 35 cm sehingga $K = 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$$
$$= 220$$

Jadi, keliling lingkaran = 220 cm.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sediakan mata uang logam Rp100,00, Rp200,00, dan Rp500,00. Ukurlah panjang diameter dan keliling mata uang tersebut. Buatlah tabel seperti berikut dan isikan hasil pengukuranmu pada tabel tersebut.

Mata uang	Diameter	Keliling	$\frac{\text{Keliling}}{\text{Diameter}}$
Rp100,00	....	....	....
Rp200,00	....	....	....
Rp500,00	....	....	....

Dari tabel tersebut, tentukan nilai π sampai tiga tempat desimal.

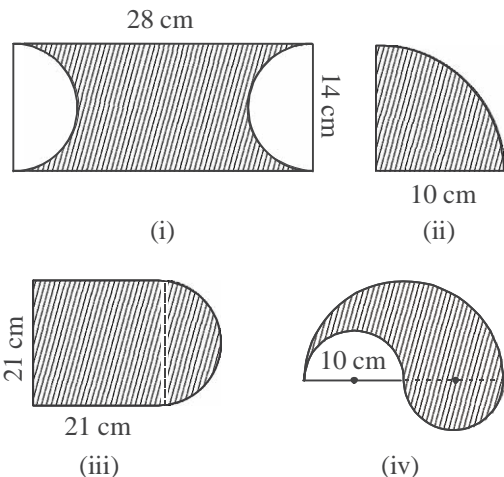
2. Hitunglah keliling lingkaran jika diketahui
   a. jari-jari 49 m;
   b. jari-jari 21 m;
   c. jari-jari 5 cm;
   d. jari-jari 12 cm;
   e. jari-jari 10,5 cm;
   f. diameter 70 cm;
   g. diameter 2,8 cm;
   h. diameter 15 m;
   i. diameter 50 m;
   j. diameter 2,4 cm;

3. Hitunglah panjang tali yang diperlukan untuk melilitkan sebuah drum berjari-jari 3 cm sebanyak lima putaran.

4. Hitunglah keliling daerah yang diarsir pada gambar berikut.

(i) (ii)

(iii)

(iv)

5. Ali ke sekolah naik sepeda menempuh jarak 706,5 m. Ternyata sebuah roda sepedanya berputar 500 kali untuk sampai ke sekolah.
   a. Hitunglah panjang jari-jari roda.
   b. Tentukan keliling roda itu.

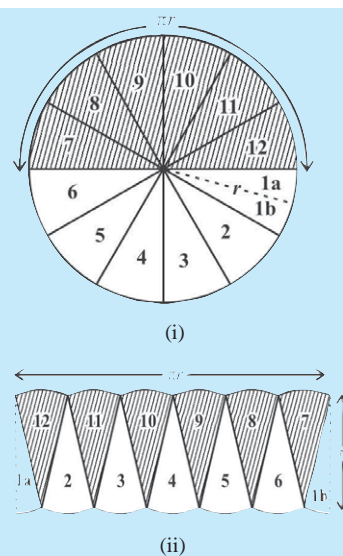
Catatan: Gunakan kalkulator untuk membantumu mengerjakan soal di atas.

3. Menghitung Luas Lingkaran

Untuk menemukan rumus luas lingkaran, lakukan kegiatan dengan langkah-langkah berikut.

KEGIATAN

(i)

(ii)

Gambar 6.8

a. Buatlah lingkaran dengan jari-jari 10 cm.
b. Bagilah lingkaran tersebut menjadi dua bagian sama besar dan arsir satu bagian.
c. Bagilah lingkaran tersebut menjadi 12 bagian sama besar dengan cara membuat 12 juring sama besar dengan sudut pusat 30^o (Gambar 6.8 (i)).
d. Bagilah salah satu juring yang tidak diarsir menjadi dua sama besar.
e. Gunting lingkaran beserta 12 juring tersebut.
f. Atur potongan-potongan juring dan susun setiap juring sehingga membentuk gambar mirip persegi panjang, seperti pada Gambar 6.8 (ii) di samping.

Berdasarkan Gambar 6.8 (ii), diskusikan dengan teman sebangkumu untuk menemukan luas lingkaran. Hasilnya bandingkan dengan uraian berikut.

Jika lingkaran dibagi menjadi juring-juring yang tak terhingga banyaknya, kemudian juring-juring tersebut dipotong dan disusun seperti Gambar 6.8 (ii) maka hasilnya akan mendekati bangun persegi panjang.

Perhatikan bahwa bangun yang mendekati persegi panjang tersebut panjangnya sama dengan setengah keliling lingkaran $(3{,}14 \times 10 \text{ cm} = 31{,}4 \text{ cm})$ dan lebarnya sama dengan jari-jari lingkaran (10 cm). Jadi, luas lingkaran dengan panjang jari-jari 10 cm = luas persegi panjang dengan p = 31,4 cm dan l = 10 cm.

$= p \times l$

$= 31{,}4 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

= 314 cm

Dengan demikian, dapat kita katakan bahwa luas lingkaran dengan jari-jari r sama dengan luas persegi panjang dengan panjang πr dan lebar r, sehingga diperoleh

$$L = \pi r \times r$$
$$L = \pi r^2$$

Karena $r = \frac{1}{2}d$, maka $L = \pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}d^2\right)$$
$$L = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Jadi, dapat diambil kesimpulan bahwa luas lingkaran L dengan jari-jari r atau diameter d adalah

$$L = \pi r^2 \quad \text{atau} \quad L = \frac{1}{4}\pi d^2$$

(Menumbuhkan kreativitas)

Carilah 4 buah benda di sekitarmu yang berbentuk lingkaran. Ukurlah keliling benda-benda tersebut menggunakan benang. Kemudian, luruskan benang tersebut pada penggaris untuk memperoleh kelilingnya. Dengan menggunakan rumus keliling, hitunglah panjang jari-jari atau diameternya.
Kemudian, hitunglah luas setiap benda tersebut. Gunakan kalkulator untuk membantu pekerjaanmu.

Hitunglah luas lingkaran jika

a. jari-jarinya 7 cm;

b. diameternya 20 cm.

Penyelesaian:

a. jari-jari = 7 cm, maka $r = 7$

$$L = \pi r^2$$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 154$$

Jadi, luas lingkaran = 154 cm^2.

b. diameter = 20 cm, maka $d = 20$

$$L = \frac{1}{4}\pi d^2$$
$$= \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times 20 \times 20$$
$$= \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times 400$$
$$= 314$$

Jadi, luas lingkaran = 314 cm^2.

Uji Kompetensi 3

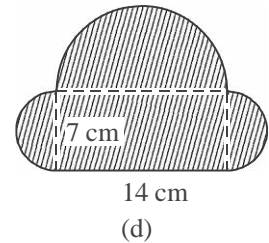
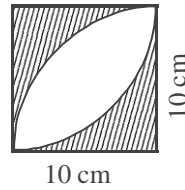
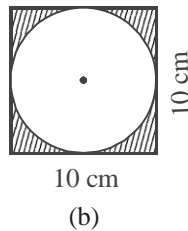
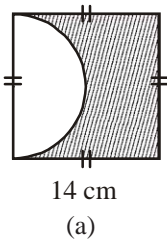
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Hitunglah luas daerah lingkaran dengan panjang jari-jari berikut ini.
   a. 21 cm d. 70 m
   b. 25 cm e. 3,5 m
   c. 49 cm
2. Hitunglah luas daerah lingkaran dengan diameter berikut ini.
   a. 50 m d. 25 cm
   b. 1,4 m e. 18 cm
   c. 35 m
3. Tentukan luas daerah arsiran pada bangun berikut.

(a)

(b)

(c)

(d)

4. Dua buah lingkaran berjari-jari 5 cm dan 15 cm. Hitunglah perbandingan
   a. kedua kelilingnya;
   b. selisih kelilingnya;
   c. kedua luasnya;
   d. selisih luasnya.
5. Di pusat sebuah kota rencananya akan dibuat sebuah taman berbentuk lingkaran dengan diameter 56 m. Di dalam taman itu akan dibuat kolam berbentuk lingkaran berdiameter 28 m. Jika di luar kolam akan ditanami rumput dengan biaya Rp6.000,00/m^2, hitunglah seluruh biaya yang harus dikeluarkan untuk menanam rumput tersebut.

Soal Tantangan

Sebuah satelit mempunyai kecepatan edar 7.500 km/jam dan mengorbit mengelilingi bumi selama 6 jam dalam satu putaran penuh. Jika jari-jari bumi 6.400 km, tentukan
a. panjang lintasan satelit tersebut;
b. jarak satelit ke pusat bumi;
c. tinggi lintasan satelit dari permukaan bumi.

4. Menghitung Perubahan Luas dan Keliling Lingkaran Jika Jari-Jari Berubah

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari mengenai luas dan keliling lingkaran, yaitu luas (L) = $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ dan keliling (K) = $2\pi r = \pi d$. Apabila nilai r atau d kita ubah,

maka besarnya keliling maupun luasnya juga mengalami perubahan. Bagaimana besar perubahan itu? Perhatikan uraian berikut.

Misalkan lingkaran berjari-jari r_1, diperbesar sehingga jari-jarinya menjadi r_2, dengan $r_2 > r_1$. Jika luas lingkaran semula adalah L_1 dan luas lingkaran setelah mengalami perubahan jari-jari adalah L_2 maka selisih luas kedua lingkaran adalah

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &= \pi r_2^2 - \pi r_1^2 \\ &= \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) \\ &= \pi\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right) \end{aligned}$$

Jika keliling lingkaran semula adalah K_1 dan keliling setelah mengalami perubahan jari-jari adalah K_2 maka selisih keliling kedua lingkaran adalah

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= 2\pi r_2 - 2\pi r_1 \\ &= 2\pi\left(r_2 - r_1\right) \end{aligned}$$

Kalian juga dapat menghitung perbandingan luas dan keliling lingkaran jika jari-jari berubah.

Perbandingan luas kedua lingkaran sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L_2 : L_1 &= \pi r_2^2 : \pi r_1^2 \\ &= r_2^2 : r_1^2 \end{aligned}$$

Adapun perbandingan kelilingnya adalah

$$\begin{aligned} K_2 : K_1 &= 2\pi r_2 : 2\pi r_1 \\ &= r_2 : r_1 \end{aligned}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa lingkaran yang berjari-jari r_1, setelah mengalami perubahan jari-jari menjadi r_2 dengan $r_2 > r_1$, maka selisih serta perbandingan luas dan kelilingnya sebagai berikut.

$$L_2 - L_1 = \pi\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)$$

$$K_2 - K_1 = 2\pi\left(r_2 - r_1\right)$$

$$L_2 : L_1 = r_2^2 : r_1^2$$

$$K_2 : K_1 = r_2 : r_1$$

(Menumbuhkan inovasi)

Diskusikan dengan teman sebangkumu. Misalkan lingkaran berjari-jari r_1 diperkecil sehingga jari-jarinya menjadi r_2 dengan $r_2 < r_1$. Hitunglah selisih serta perbandingan luas dan keliling kedua lingkaran tersebut. Buatlah kesimpulannya. Kemukakan hasilnya secara singkat di depan kelas.

Hitunglah selisih serta perbandingan luas dan keliling lingkaran yang berjari-jari 2 cm dan 4 cm.

Penyelesaian:

Lingkaran berjari-jari 2 cm, maka $r_1 = 2$.

Lingkaran berjari-jari 4 cm, maka $r_2 = 4$.

•) Selisih luas $= L_2 - L_1$

$$= \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$$
$$= \pi(4-2)(4+2)$$
$$= \pi \times 2 \times 6$$
$$= 12\pi \text{ cm}^2$$

•) Selisih keliling $= K_2 - K_1$

$$= 2\pi(r_2 - r_1)$$
$$= 2\pi(4-2)$$
$$= 4\pi \text{ cm}$$

•) Perbandingan luas $= L_2 : L_1$

$$= r_2^2 : r_1^2$$
$$= 4^2 : 2^2$$
$$= 16 : 4$$
$$= 4 : 1$$

•) Perbandingan keliling $= K_2 : K_1$

$$= r_2 : r_1$$
$$= 4 : 2$$
$$= 2 : 1$$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Diketahui suatu lingkaran berjari-jari *r* cm. Hitung selisih serta perbandingan luas dan keliling lingkaran jika jari-jarinya diubah menjadi
   a. dua kalinya;
   b. $(r + 2)$ cm.

2. Diketahui jari-jari suatu lingkaran semula 7 cm. Hitunglah selisih dan perbandingan luas lingkaran setelah jari-jarinya
   a. diperbesar tiga kalinya;
   b. diperkecil $\frac{1}{2}$ kalinya.

3. Perbandingan luas dua buah lingkaran adalah 36 : 64. Hitunglah
   a. perbandingan keliling kedua lingkaran;
   b. selisih keliling kedua lingkaran;
   c. perbandingan jari-jari kedua lingkaran;
   d. selisih jari-jari kedua lingkaran.

4. Jari-jari dua buah lingkaran masing-masing adalah a cm dan $3a$ cm. Jika jumlah panjang jari-jari kedua lingkaran itu 28 cm, tentukan
   a. nilai a;
   b. perbandingan luas dan kelilingnya;
   c. selisih luas dan kelilingnya.

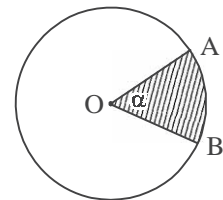
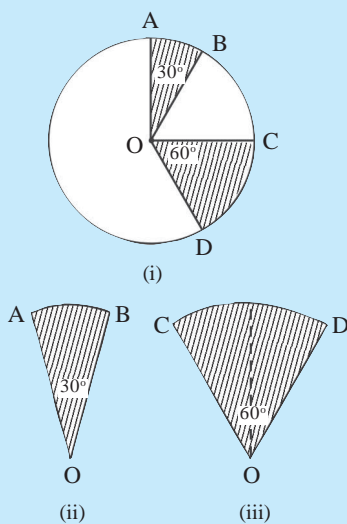
C. HUBUNGAN ANTARA SUDUT PUSAT, PANJANG BUSUR, DAN LUAS JURING

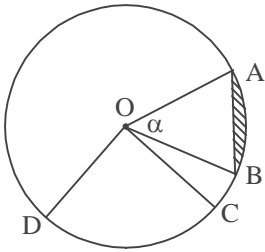
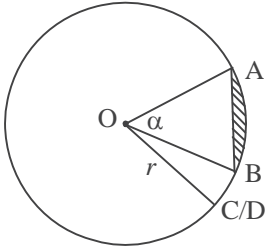
1. Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

Sudut pusat adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari yang berpotongan pada pusat lingkaran. Pada Gambar 6.9 di samping, $\angle$ AOB = α adalah sudut pusat lingkaran. Garis lengkung AB disebut busur AB dan daerah arsiran OAB disebut juring OAB.

Gambar 6.9

Pada pembahasan kali ini, kita akan mempelajari hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring pada sebuah lingkaran.

Untuk menentukan hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lakukan kegiatan berikut.

KEGIATAN

Gambar 6.10

1. Buatlah lingkaran dengan pusat di O berjari-jari 5 cm.
2. Pada lingkaran tersebut buatlah sudut pusat $\angle$ AOB = 30° dan $\angle$ COD = 60° (Gambar 6.10 (i)).
3. Untuk menyelidiki hubungan antara sudut pusat dan panjang busur, ukurlah $\overset{\frown}{AB}$ dan $\overset{\frown}{CD}$ dengan menggunakan benang. Bagaimana hubungan panjang $\overset{\frown}{AB}$ dan $\overset{\frown}{CD}$?
4. Untuk menyelidiki hubungan antara sudut pusat dan luas juring, jiplaklah juring OAB dan potong sekeliling juring OAB. Kemudian ukurlah juring OCD dengan menggunakan juring OAB (Gambar 6.10 (ii) dan (iii)). Apakah besar juring OCD dua kali besar juring OAB?
5. Tentukan besar perbandingan antara kedua sudut pusat, panjang kedua busur, dan luas kedua juring. Apakah menghasilkan perbandingan yang sama?

(i)

(ii)

Gambar 6.11

Jika kegiatan ini kalian lakukan dengan teliti maka akan diperoleh bahwa

$$\frac{\text{besar}\angle AOB}{\text{besar}\angle COD}=\frac{\text{panjang }\overset{\frown}{AB}}{\text{panjang }\overset{\frown}{CD}}=\frac{\text{luas juring OAB}}{\text{luas juring OCD}}=\frac{1}{2}.$$

Panjang busur dan luas juring pada suatu lingkaran berbanding lurus dengan besar sudut pusatnya.

Sekarang perhatikan Gambar 6.11 (i). Dari gambar tersebut diperoleh

$$\frac{\text{besar}\angle AOB}{\text{besar}\angle COD}=\frac{\text{panjang }\overset{\frown}{AB}}{\text{panjang }\overset{\frown}{CD}}=\frac{\text{luas juring OAB}}{\text{luas juring OCD}}.$$

Sekarang, misalkan $\angle$ COD = satu putaran penuh = 360° maka keliling lingkaran = $2\pi r$, dan luas lingkaran = πr^2 dengan r jari-jari, akan tampak seperti Gambar 6.11 (ii), sehingga diperoleh

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ}=\frac{\text{panjang AB}}{2\pi r}=\frac{\text{luas juring OAB}}{\pi r^2}$$

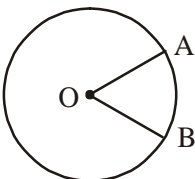
Dengan demikian, diperoleh rumus panjang busur AB, luas juring AB, dan luas tembereng AB pada Gambar 6.11 adalah

$$\text{panjang busur AB }=\frac{\alpha}{360^\circ}\times 2\pi r$$

$$\text{luas juring OAB }=\frac{\alpha}{360^\circ}\times \pi r^2$$

luas tembereng AB = luas juring OAB – luas Δ AOB.

Perhatikan Gambar 6.12. Diketahui panjang jari-jari OA = 10 cm. Jika besar $\angle$ AOB = 60°, hitunglah

a. panjang $\overset{\frown}{AB}$;
b. luas juring OAB;
c. luas tembereng AB.

Gambar 6.12

Penyelesaian:

a. Panjang $\overset{\frown}{AB}=\frac{\angle AOB}{360^\circ}\times 2\pi r$

$$=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 2\times 3{,}14\times 10$$

$$=\frac{1}{6}\times 62{,}8$$

$$=10{,}47\text{ cm}$$

b. luas juring OAB $=\frac{\angle AOB}{360^\circ}\times \pi r^2$

$$=\frac{60^\circ}{360^\circ}\times 3{,}14\times 10^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 314$$
$$= 52{,}33 \text{ cm}^2$$

c. Karena besar $\angle$ AOB = 60°, maka Δ AOB sama sisi dengan panjang sisi 10 cm, sehingga

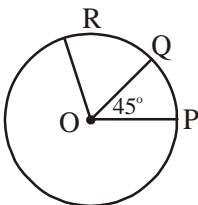
$$s = \frac{1}{2} \times \text{keliling segitiga}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)$$
$$= \frac{1}{2}(10 + 10 + 10)$$
$$= \frac{1}{2} \times 30 = 15$$

$$\text{luas } \Delta \text{ AOB} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$$
$$= \sqrt{15(5)(5)(5)}$$
$$= \sqrt{1.875}$$
$$= 43{,}30 \text{ cm}^2$$

luas tembereng AB = luas juring OAB – luas Δ AOB
= (52,33 – 43,30) cm^2
= 9,03 cm^2.

2. Menyelesaikan Masalah yang Berkaitan dengan Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

Hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan materi tersebut. Pelajari contoh berikut.

Perhatikan gambar berikut.

Gambar 6.13

Penyelesaian:

a. Di depan telah dipelajari hubungan antara sudut pusat dan panjang busur berikut.

$$\frac{\text{besar } \angle \text{ POQ}}{\text{besar } \angle \text{ QOR}} = \frac{\text{panjang } \overset{\frown}{PQ}}{\text{panjang } \overset{\frown}{QR}}, \text{ sehingga diperoleh}$$

Pada gambar di atas, diketahui panjang busur PQ = 16,5 cm, panjang busur QR = 22 cm, dan besar $\angle$ POQ = 45°.

a. Hitunglah besar $\angle$ QOR.

b. Hitunglah panjang jari-jari OP.

c. Tentukan luas juring OPQ dan OQR.

$$\frac{45^\circ}{\text{besar } \angle \text{ QOR}} = \frac{16,5}{22}$$

$$\Leftrightarrow \frac{45^\circ}{x} = \frac{\frac{33}{2}}{22}$$

$$\Leftrightarrow \frac{45^\circ}{x} = \frac{33}{44}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{44 \times 45^\circ}{33} = 60^\circ$$

Jadi, besar $\angle$ QOR = 60°.

b. $\text{Panjang } \overset{\frown}{QR} = \frac{\text{besar } \angle QOR}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$22 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$22 = \frac{1}{6} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$r = \frac{22 \times 6 \times 7}{2 \times 22} = 21$$

Jadi, panjang jari-jari OP = 21 cm.

c. $\text{Luas juring OPQ} = \frac{\angle \text{ POQ}}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 173,25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Luas juring OQR} = \frac{\angle \text{ QOR}}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 231 \text{ cm}^2$$

Uji Kompetensi 5

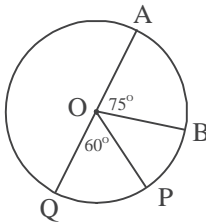
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Pada suatu lingkaran dengan pusat O diketahui titik A, B, C, dan D pada keliling lingkaran, sehingga $\angle$ AOB = 35° dan $\angle$ COD = 140°. Jika panjang $\overset{\frown}{AB}$ = 14 cm, hitunglah panjang $\overset{\frown}{CD}$.

2.

Pada gambar di samping, luas juring OAB = 50 cm². Hitunglah

a. luas juring POQ;

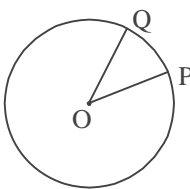
b. jari-jari lingkaran;

c. luas lingkaran.

3. Panjang jari-jari sebuah lingkaran diketahui 20 cm. Hitunglah

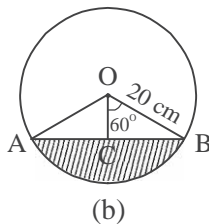
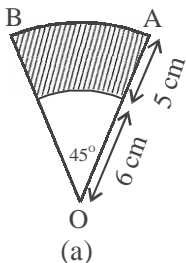
   a. panjang busur di hadapan sudut 30°;

   b. luas juring di hadapan sudut 45°.

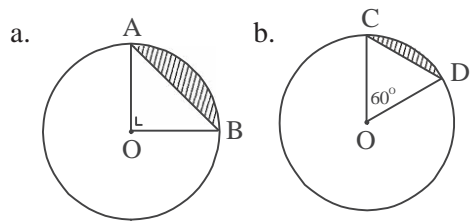
4.

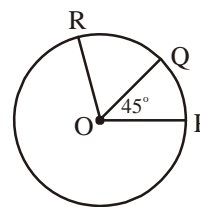
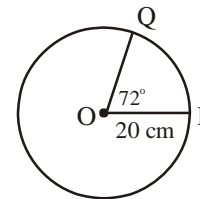
Pada gambar di samping diketahui panjang OP = 28 cm dan $\overset{\frown}{PQ}$ = 17,6 cm. Hitung luas juring POQ.

5. Hitunglah keliling dan luas bangun yang diarsir pada gambar berikut.

(a)

(b)

6. Hitunglah luas tembereng pada gambar berikut jika jari-jari lingkaran 14 cm.

a.

b.

7.

Pada gambar di samping, panjang busur PQ = 50 cm, panjang busur QR = 75 cm, dan besar ∠POQ = 45°. Hitunglah besar ∠QOR.

8. Pada gambar di samping, besar ∠ POQ = 72° dan panjang jari-jari OP = 20 cm. Hitunglah

   a. panjang busur besar PQ;

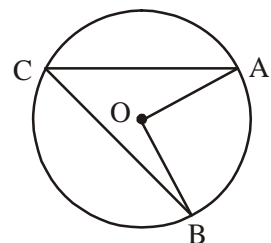
   b. luas juring besar POQ.

D. SUDUT PUSAT DAN SUDUT KELILING LINGKARAN

1. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari bahwa *sudut pusat* dibentuk oleh dua jari-jari lingkaran yang berpotongan di titik pusatnya. Adapun *sudut keliling* adalah sudut yang dibentuk oleh dua tali busur yang berpotongan di satu titik pada keliling lingkaran.

Gambar 6.14

Pada Gambar 6.14 di samping, OA dan OB berpotongan di O membentuk sudut pusat, yaitu ∠ AOB. Adapun tali busur AC dan CB berpotongan di titik C membentuk sudut keliling ∠ ACB.

Sudut pusat $\angle$AOB dan sudut keliling $\angle$ACB menghadap busur yang sama, yaitu $\overset{\frown}{AB}$. Sekarang, kita akan mempelajari hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap busur yang sama.

Perhatikan Gambar 6.15.

Gambar 6.15

Lingkaran di samping berpusat di titik O dan mempunyai jari-jari OA = OB = OC = OD = r.

Misalkan $\angle$ AOC = α dan $\angle$ COB = β, maka $\angle$ AOB = α + β.

Perhatikan Δ BOD.

$\angle$ BOD pelurus bagi $\angle$ BOC, sehingga $\angle$ BOD = 180° – β .

Δ BOD segitiga sama kaki, karena OB = OD = r, sehingga

$$\angle \text{ODB} = \angle \text{OBD} = \frac{180^\circ - \angle \text{BOD}}{2}.$$

Karena $\angle$BOD = 180° – β, maka diperoleh

$$\angle \text{ODB} = \angle \text{OBD} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{1}{2}\beta.$$

Sekarang perhatikan Δ AOD.

$\angle$ AOD pelurus bagi $\angle$ AOC, sehingga $\angle$ AOD = 180° – α.

Δ AOD adalah segitiga sama kaki, karena OA = OD = r, sehingga

$$\angle \text{ODA} = \angle \text{OAD} = \frac{180^\circ - \angle \text{AOD}}{2}$$

$$= \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha$$

Dengan demikian, besar $\angle$ ADB

$$= \angle \text{ODA} + \angle \text{ODB}$$

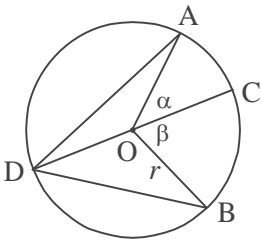
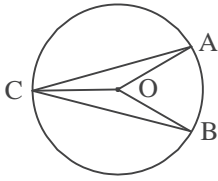
$$= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \angle \text{AOB} \quad \text{atau}$$

besar $\angle$ AOB = 2 × besar $\angle$ ADB.

Karena $\angle$ AOB adalah sudut pusat dan $\angle$ ADB adalah sudut keliling, di mana keduanya menghadap $\overset{\frown}{AB}$, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Jika sudut pusat dan sudut keliling menghadap busur yang sama maka besar sudut pusat = 2 × besar sudut keliling.

Gambar 6.16

Pada lingkaran di atas, jika $\angle$ ACO = 15º dan $\angle$BCO = 12º, hitung besar $\angle$ AOB.

Penyelesaian:

$\angle$ACB merupakan sudut keliling dan $\angle$AOB merupakan sudut pusat, sehingga diperoleh

sudut keliling ACB = $\angle$ ACO + $\angle$ BCO
= $15^o + 12^o$
= 27^o

sudut pusat AOB = 2 × sudut keliling ACB
= 2×27^o
= 54^o

2. Besar Sudut Keliling yang Menghadap Diameter Lingkaran

Kalian telah mempelajari bahwa besar sudut pusat lingkaran adalah dua kali besar sudut kelilingnya, jika menghadap busur yang sama. Bagaimana besar sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran?

Perhatikan Gambar 6.17.

Sudut pusat AOB menghadap busur AB. Perhatikan bahwa sudut keliling ACB dan sudut keliling ADB menghadap busur AB, sehingga diperoleh

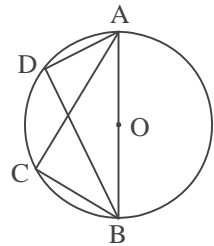
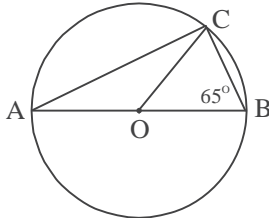
Gambar 6.17

$$\angle AOB = 2 \times \angle ACB$$
$$180° = 2 \times \angle ACB$$
$$\angle ACB = \frac{180°}{2} = 90°$$

atau

$$\angle AOB = 2 \times \angle ADB$$
$$180° = 2 \times \angle ADB$$
$$\angle ADB = \frac{180°}{2} = 90°$$

Dari Gambar 6.16 tampak bahwa $\angle$ AOB adalah sudut lurus, sehingga besar $\angle$ AOB = 180º.

Besar sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran besarnya 90º (sudut siku-siku).

Diketahui $\angle ABC = 65^o$ dengan AB diameter lingkaran. Hitunglah besar $\angle CAB$.

Gambar 6.18

Penyelesaian:

Ruas garis AB adalah diameter lingkaran.

Karena $\angle ACB$ adalah sudut keliling yang menghadap diameter AB, maka besar $\angle ACB = 90^o$.

Perhatikan bahwa Δ BCO adalah segitiga sama kaki, karena OB = OC = *r*, sehingga $\angle BCO = \angle CBO = 65^o$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\angle ACO &= \angle ACB - \angle BCO \\ &= 90^\circ - 65^\circ \\ &= 25^\circ\end{aligned}$$

Karena Δ AOC sama kaki (OA = OC = *r*), maka $\angle CAO = \angle ACO = 25^o$.

3. Sudut-Sudut Keliling yang Menghadap Busur yang Sama

Untuk menentukan besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama, perhatikan Gambar 6.19 di samping.

Gambar 6.19

Pada gambar tersebut $\angle AOB$ adalah sudut pusat yang menghadap $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, sedangkan $\angle ACB$, $\angle ADB$, dan $\angle AEB$ adalah sudut keliling yang menghadap $\overset{\frown}{AB}$.

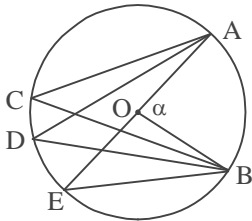
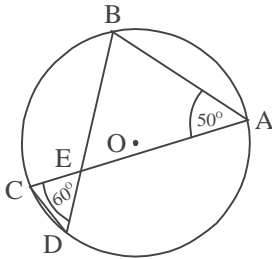
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\angle AEB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = \frac{1}{2}\alpha$$

Jadi, besar $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Besar sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama besar atau $\frac{1}{2} \times$ sudut pusatnya.

Contoh

Gambar 6.20

Perhatikan Gambar 6.20.

Diketahui besar ∠BAC = 50° dan ∠CED = 60°. Hitunglah besar ∠BDC, ∠ACD, dan ∠ABD.

Penyelesaian:

Dari Gambar 6.20 tampak bahwa ∠ BAC dan ∠ BDC sudut keliling menghadap busur yang sama yaitu $\overset{\frown}{BC}$, sehingga besar ∠ BDC = ∠ BAC = 50°.

Perhatikan Δ CED.

∠ ACD = 180° – (∠ CED + ∠ CDE)
= 180° – (∠ CED + ∠ CDB)
= 180° – (60° + 50°)
= 70°

Sudut ACD dan ∠ ABD adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama yaitu $\overset{\frown}{AD}$, sehingga besar ∠ ABD = ∠ ACD = 70°.

Uji Kompetensi 6

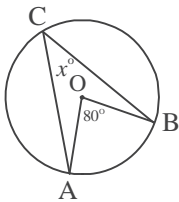
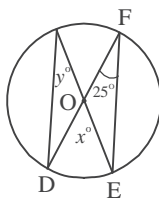
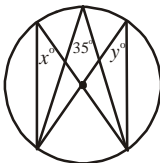
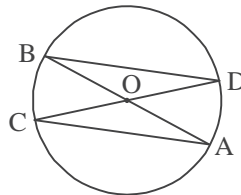
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Pada gambar berikut, hitunglah nilai x dan y.

(a)

(b)

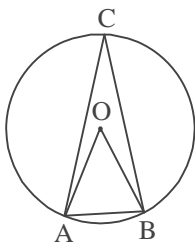
(c)

2.

Pada gambar di atas diketahui besar ∠ACD = 20°. Hitunglah besar

a. ∠BOC;

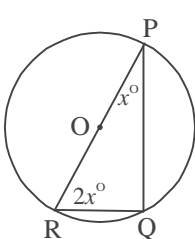
b. ∠AOC;

c. ∠BOD.

3\.

Diketahui besar $\angle$ BCA = 25° dan $\angle$ CBO = 15°. Hitunglah besar

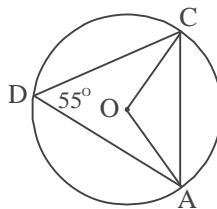
a. $\angle$ AOB; c. $\angle$ ABC;

b. $\angle$ OAB; d. $\angle$ BAC.

4\.

Pada gambar di samping PR adalah diameter lingkaran. Hitunglah

a. nilai x;

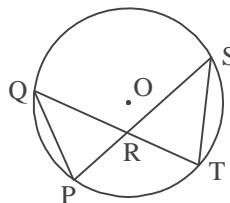
b. besar $\angle$ PRQ.

5\.

Diketahui besar $\angle$ ADC = 55°. Hitunglah besar

a. $\angle$ AOC;

b. sudut refleks AOC;

c. $\angle$ OAC dan $\angle$ACD.

6\.

Diketahui besar $\angle$ PQR = 48° dan $\angle$ QRS = 101°. Hitunglah besar

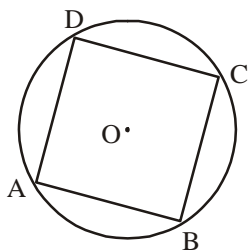
a. $\angle$ PST; c. $\angle$ QTS.

b. $\angle$ QPR;

E. SEGI EMPAT TALI BUSUR (PENGAYAAN)

1. Pengertian Segi Empat Tali Busur

Gambar 6.21

Agar kalian memahami mengenai segi empat tali busur, perhatikan Gambar 6.21. Pada gambar tersebut titik O adalah titik pusat lingkaran dan titik A, B, C, serta D terletak pada keliling lingkaran tersebut. Ruas garis AB, BC, CD, dan AD adalah tali-tali busur lingkaran. Tali-tali busur tersebut membentuk segi empat ABCD, dan selanjutnya disebut *segi empat tali busur.*

Segi empat tali busur adalah segi empat yang titik-titik sudutnya terletak pada lingkaran.

2. Sifat-Sifat Segi Empat Tali Busur

Perhatikan Gambar 6.22.

Pada gambar tersebut tampak bahwa sudut-sudut yang berhadapan pada segi empat tali busur ABCD adalah $\angle$ ABC dengan $\angle$ ADC dan $\angle$ BAD dengan $\angle$ BCD.

Perhatikan sudut keliling $\angle ABC$ dan $\angle ADC$.

Gambar 6.22

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \times (\angle AOD + \angle DOC)$$

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \times (\angle AOB + \angle BOC)$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle ADC &= \frac{1}{2} \times (\angle AOD + \angle DOC) + \frac{1}{2} \times (\angle AOB + \angle BOC) \\ &= \frac{1}{2} \times (\angle AOD + \angle DOC + \angle AOB + \angle BOC) \\ &= \frac{1}{2} \times 360^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

Sekarang, perhatikan sudut keliling $\angle BAD$ dan $\angle BCD$.

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \times (\angle BOC + \angle COD)$$

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \times (\angle BOA + \angle AOD)$$

Dengan demikian, diperoleh

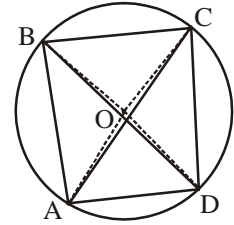
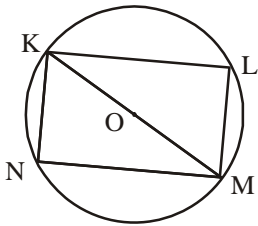
$$\begin{aligned}\angle BAD + \angle BCD &= \frac{1}{2} \times (\angle BOC + \angle COD) + \frac{1}{2} \times (\angle BOA + \angle AOD) \\ &= \frac{1}{2} \times (\angle BOC + \angle COD + \angle BOA + \angle AOD) \\ &= \frac{1}{2} \times 360^\circ \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

Jadi, $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ dan $\angle BAD + \angle BCD = 180^o$.

Jumlah dua sudut yang saling berhadapan pada segi empat tali busur adalah 180^o.

Selanjutnya, perhatikan Gambar 6.23.

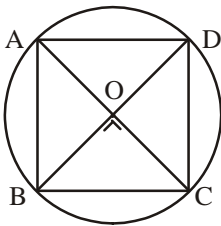
Gambar 6.23

Pada gambar di samping, $\overset{\frown}{QS}$ adalah diameter lingkaran sekaligus diagonal segi empat PQRS. Karena $\angle QPS$ dan $\angle QRS$ adalah sudut keliling, maka besar $\angle QPS = \angle QRS = 90^o$. Segi empat PQRS selanjutnya disebut *segi empat tali busur siku-siku*.

Segi empat tali busur yang salah satu diagonalnya merupakan diameter lingkaran disebut segi empat tali busur siku-siku.

Gambar 6.24

Perhatikan Gambar 6.24.

Pada gambar tersebut, $\overline{KM}$ dan $\overline{LN}$ adalah diameter lingkaran, $\angle$ KLM dan $\angle$ KNM adalah sudut keliling yang menghadap diameter $\overline{KM}$, sedangkan $\angle$ LKN dan $\angle$ LMN adalah sudut keliling yang menghadap diameter $\overline{LN}$.

Dengan demikian, $\angle$ KLM = $\angle$ KNM = $\angle$ LKN = $\angle$ LMN = 90^o. Karena keempat sudutnya siku-siku, akibatnya $\overline{KL} // \overline{NM}$, $\overline{KN} // \overline{LM}$, $\overline{KL} = \overline{NM}$, dan $\overline{KN} = \overline{LM}$, dengan $\overline{KM}$ dan $\overline{LN}$ adalah diagonal-diagonal segi empat KLMN. Dengan kata lain, segi empat KLMN adalah suatu *persegi panjang*.

Segi empat tali busur yang kedua diagonalnya merupakan diameter lingkaran akan membentuk bangun persegi panjang.

Gambar 6.25

Selanjutnya, bagaimanakah jika kedua diagonal segi empat tali busur merupakan diameter lingkaran dan saling berpotongan tegak lurus? Bangun apakah yang terbentuk? Apakah terbentuk bangun persegi panjang? Agar kalian dapat menjawabnya, perhatikan Gambar 6.25.

Pada Gambar 6.25, $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ adalah diameter lingkaran dengan $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Karena $\angle$ ABC, $\angle$ BCD, $\angle$ CDA, dan $\angle$ DAB adalah sudut-sudut keliling yang menghadap diameter, besar $\angle$ ABC = $\angle$ BCD = $\angle$ CDA = $\angle$ DAB = 90^o.

Sekarang, perhatikan Δ BOC.

Jika Δ BOC kita putar sejauh 90^o berlawanan arah putaran jarum jam dengan titik O sebagai titik putar maka diperoleh

$$\overline{OB} \rightarrow \overline{OC}, \overline{OC} \rightarrow \overline{OD}, \text{dan} \angle BOC \rightarrow \angle COD.$$

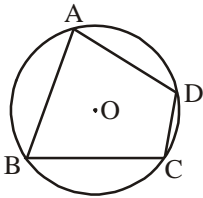
Dengan demikian, $\overline{BC} \rightarrow \overline{CD}$ atau $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Analog dengan cara di atas, dapat ditunjukkan bahwa $\overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AB}$, sehingga $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AB}$. Dengan kata lain, segi empat ABCD adalah bangun persegi.

Segi empat tali busur yang kedua diagonalnya merupakan diameter lingkaran yang saling berpotongan tegak lurus akan membentuk bangun *persegi*.

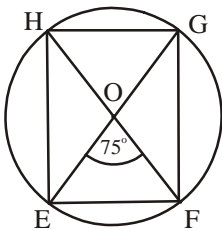
Uji Kompetensi 7

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Perhatikan gambar di bawah.

ABCD adalah segi empat tali busur dengan $\angle$ ABC = 80° dan $\angle$ ADC = 100°. Tentukan

a. besar $\angle$ BCD;

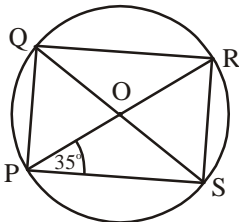
b. besar $\angle$ BAD.

2.

Perhatikan gambar di atas.

a. Jika $\angle$ EOF = 75°, tentukan besar sudut yang lain.

b. Apakah jenis Δ FOG?

c. Bangun apakah EFGH?

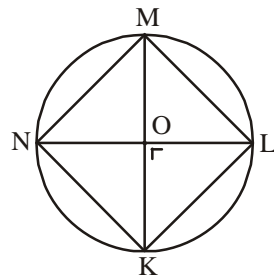
3.

Perhatikan gambar di atas.

Diketahui $\overline{PR}$ dan $\overline{QS}$ adalah diameter lingkaran.

a. Jika $\angle$ OPS = 35°, tentukan besar sudut yang lain.

b. Bangun apakah PQRS?

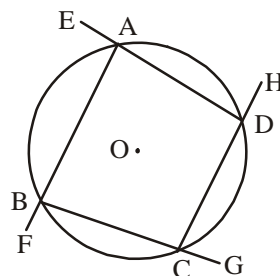
c. Sebutkan dua pasang segitiga pada segi empat PQRS yang sama dan sebangun.

4.

Dari gambar di atas, KLMN adalah segi empat tali busur dengan diagonal $\overline{KM}$ dan $\overline{LN}$ merupakan diameter lingkaran yang saling berpotongan tegak lurus.

a. Tentukan besar semua sudut pada segi empat KLMN.

b. Bangun apakah KLMN?

c. Jika panjang jari-jari lingkaran adalah *r*, tentukan luas segi empat KLMN.

5.

Perhatikan gambar di atas.

Diketahui ABCD adalah segi empat tali busur dengan $\angle$ DCG, $\angle$ ADH, $\angle$ BAE, dan $\angle$ CBF adalah sudut luar segi empat ABCD.

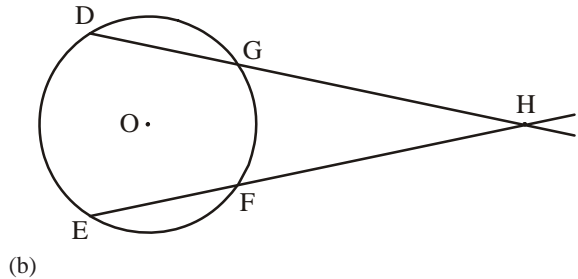
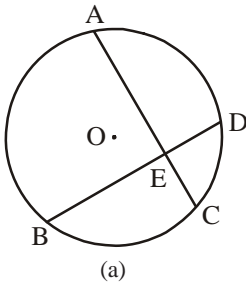
a. Buktikan bahwa besar $\angle$ DCG = $\angle$ BAD.

b. Jika $\angle$ ABC = 80°, tentukan besar sudut yang lain.

F. SUDUT ANTARA DUA TALI BUSUR (PENGAYAAN)

Dua tali busur dari sebuah lingkaran dapat berpotongan di dalam lingkaran atau berpotongan di luar lingkaran pada perpanjangan kedua tali busur itu. Agar kalian lebih memahaminya, perhatikan Gambar 6.26 berikut.

(a)

(b)

Gambar 6.26

Pada Gambar 6.26 (a), tali busur $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di dalam lingkaran, sedangkan Gambar 6.26 (b) menunjukkan tali busur $\overline{DG}$ dan $\overline{EF}$ berpotongan pada perpanjangan kedua tali busur itu di luar lingkaran.

Pada bagian ini kita akan menentukan besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di dalam atau di luar lingkaran.

1. Sudut Antara Dua Tali Busur Jika Berpotongan Di Dalam Lingkaran

Perhatikan Gambar 6.27. Lingkaran dengan pusat di titik O dengan titik E adalah titik potong antara tali busur $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$. Dari gambar tersebut tampak bahwa $\angle$ AEB, $\angle$ BEC, $\angle$ CED, dan $\angle$ AED adalah sudut di dalam lingkaran yang dibentuk oleh perpotongan antara tali busur $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$.

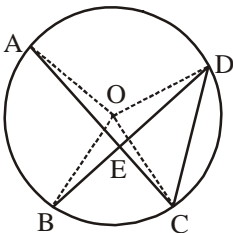
Dari gambar tersebut diperoleh

Gambar 6.27

a. $\angle$ BDC adalah sudut keliling yang menghadap busur BC, sehingga $\angle BDC = \frac{1}{2} \times \angle BOC$;

b. $\angle$ ACD adalah sudut keliling yang menghadap busur AD, sehingga $\angle ACD = \frac{1}{2} \times \angle AOD$.

Perhatikan bahwa $\angle$ BEC adalah sudut luar Δ CDE, sehingga

$$\begin{aligned}\angle BEC &= 180^o - \angle CED \\ &= 180^o - (180^o - \angle CDE - \angle ECD) \\ &= \angle CDE + \angle ECD\end{aligned}$$

$$= \angle BDC + \angle ACD$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \angle BOC\right) + \left(\frac{1}{2} \times \angle AOD\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\angle BOC + \angle AOD)$$

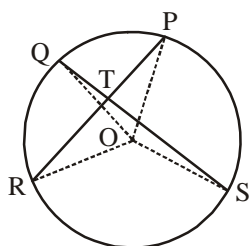
Analog dengan cara di atas, maka diperoleh

$$\angle AEB = \frac{1}{2} \times (\angle AOB + \angle COD)$$

$$\angle CED = \frac{1}{2} \times (\angle COD + \angle AOB)$$

$$\angle AED = \frac{1}{2} \times (\angle AOD + \angle BOC)$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di dalam lingkaran sama dengan setengah dari jumlah sudut-sudut pusat yang menghadap busur yang diapit oleh kaki-kaki sudut itu.

Gambar 6.28

Pada gambar di atas, diketahui besar $\angle$ POQ = 60º dan besar $\angle$ ROS = 230º. Tentukan besar $\angle$ PTQ.

Penyelesaian:

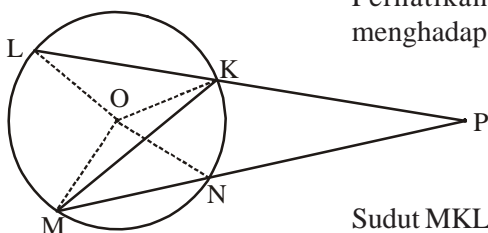
$$\angle PTQ = \frac{1}{2} \times (\angle POQ + \angle ROS)$$

$$= \frac{1}{2} \times (60^\circ + 130^\circ)$$

$$= 95^\circ$$

2. Sudut Antara Dua Tali Busur yang Berpotongan Di Luar Lingkaran

Perhatikan Gambar 6.29 berikut.

Titik O adalah titik pusat lingkaran, sedangkan $\overline{LK}$ dan $\overline{MN}$ adalah dua tali yang jika diperpanjang akan berpotongan di titik P, di mana titik P di luar lingkaran, sehingga terbentuk $\angle$ KPN.

Gambar 6.29

Perhatikan bahwa ∠ KMN adalah sudut keliling yang menghadap busur KN, sehingga

$$\angle KMN = \frac{1}{2} \times \angle KON$$

Sudut MKL adalah sudut keliling yang menghadap busur LM, sehingga

$$\angle MKL = \frac{1}{2} \times \angle MOL$$

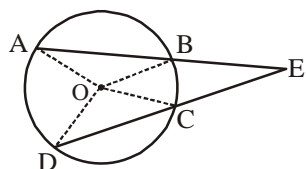
Sudut MKL adalah sudut luar Δ KPM, sehingga berlaku

$$\angle MKL = \angle KMN + \angle KPN$$

atau

$$\begin{aligned} \angle KPN &= \angle MKL - \angle KMN \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \angle MOL\right) - \left(\frac{1}{2} \times \angle KON\right) \\ &= \frac{1}{2} \times (\angle MOL - \angle KON) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Besar sudut antara dua tali busur yang berpotongan di luar lingkaran sama dengan setengah dari selisih sudut-sudut pusat yang menghadap busur yang diapit oleh kaki-kaki sudut itu.

Gambar 6.30

Perhatikan Gambar 6.30 di atas.

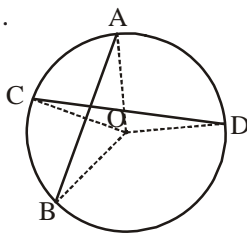
Diketahui besar ∠ AED = 25° dan besar ∠ BOC = 35°. Tentukan besar ∠ AOD.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \angle AED &= \frac{1}{2} \times (\angle AOD - \angle BOC) \\ 25^\circ &= \frac{1}{2} \times (\angle AOD - 35^\circ) \\ 50^\circ &= \angle AOD - 35^\circ \\ \angle AOD &= 85^\circ \end{aligned}$$

Uji Kompetensi 8

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1.

   Perhatikan gambar di samping.

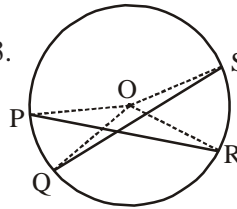
   Jika besar ∠ AOC = 65^o dan ∠ BOD = 140^o, tentukan

   a. besar ∠ AEC;

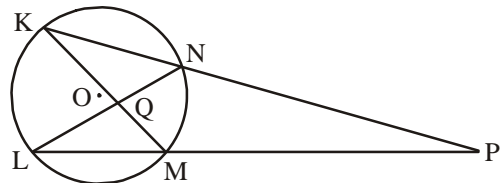
   b. besar ∠ BEC.

2.

   Pada gambar di atas tali busur DE dan GF berpotongan di titik H di luar lingkaran. Diketahui besar ∠ DOG = 150^o dan ∠ EOF = 40^o.

   Tentukan besar ∠ DHG.

3. Perhatikan gambar di samping.

   Jika besar ∠ POQ = 35^o dan besar ∠ ROS = 50^o, tentukan besar ∠ PTQ dan ∠ QTR.

4.

   Pada gambar di atas diketahui besar ∠ NOM = 30^o dan ∠ KQL = 60^o. Tentukan

   a. besar ∠ KOL;

   b. besar ∠ KPL.

Rangkuman

1. Perhatikan gambar di samping.

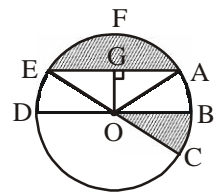
   a. Titik O disebut pusat lingkaran.

   b. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, dan $\overline{OE}$ disebut jari-jari lingkaran.

   c. $\overline{BD}$ disebut garis tengah atau diameter, yaitu garis yang menghubungkan dua titik pada keliling lingkaran dan melalui pusat lingkaran.

   d. $\overline{AE}$ disebut tali busur, yaitu garis yang menghubungkan dua titik pada keliling lingkaran.

   e. Garis lengkung AFE disebut busur kecil (pendek), yaitu busur yang panjangnya kurang dari setengah keliling lingkaran.

   f. Garis lengkung ACE disebut busur besar (panjang), yaitu busur yang panjangnya lebih dari setengah keliling lingkaran.

g. Daerah yang dibatasi oleh jari-jari $\overline{OC}$ dan $\overline{OB}$ serta busur BC disebut sektor atau juring lingkaran.

h. Daerah yang dibatasi oleh tali busur $\overline{AE}$ dan busur AFE disebut tembereng.

i. $\overline{OG} \perp$ tali busur $\overline{AE}$ disebut apotema, yaitu jarak terpendek antara tali busur dan pusat lingkaran.

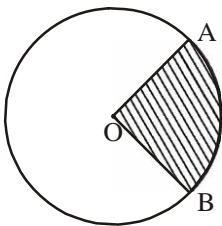
2. Nilai π merupakan suatu pendekatan. Besar nilai π adalah 3,14 atau $\frac{22}{7}$.

3. Rumus keliling lingkaran (K) dengan diameter (d) dan jari-jari (r) sebagai berikut.

   $\text{K} = \pi d$ atau $\text{K} = 2\pi r$

4. Rumus luas lingkaran (L) dengan diameter (d) dan jari-jari (r) sebagai berikut.

   $\text{L} = \pi r^2$ atau $\text{L} = \frac{1}{4}\pi d^2$

5. Dari gambar di samping berlaku sebagai berikut.

$$\frac{\text{Besar sudut pusat AOB}}{\text{Besar sudut satu putaran penuh}}$$

$$= \frac{\text{Panjang busur AB}}{\text{Keliling lingkaran}} = \frac{\text{Luas juring OAB}}{\text{Luas lingkaran}}$$

6. Panjang busur $= \frac{\text{besar sudut pusat}}{360^\circ} \times 2\pi r$.

   Luas juring $= \frac{\text{besar sudut pusat}}{360^\circ} \times \pi r^2$.

   Luas tembereng = luas juring – luas segitiga.

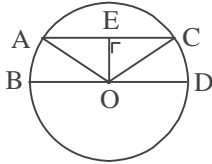
Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, apakah kalian sudah paham mengenai *Lingkaran*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi ini dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, tanyakan pada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Berikan contoh masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan lingkaran, kemudian selesaikanlah. Buatlah laporan dan kemukakan hal ini secara singkat di depan kelas.

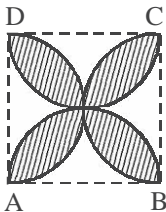
Evaluasi 6

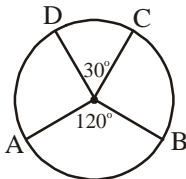
Kerjakan di buku tugasmu.

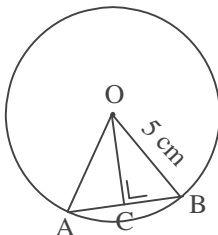
A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

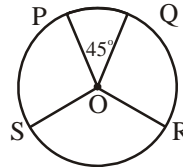
1.

   Apotema ditunjukkan oleh garis ....
   a. OA
   b. AC
   c. OE
   d. BO

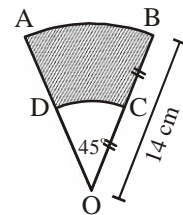
2. Suatu roda berdiameter 63 cm berputar menempuh jarak 198 m. Roda tersebut berputar sebanyak ....
   a. 60 kali c. 100 kali
   b. 75 kali d. 110 kali

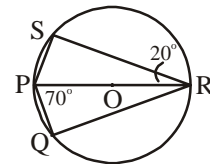
3.

   Jika AB = 14 cm maka luas daerah arsiran pada gambar di samping adalah ....
   a. 56 cm^2 c. 112 cm^2
   b. 88 cm^2 d. 176 cm^2

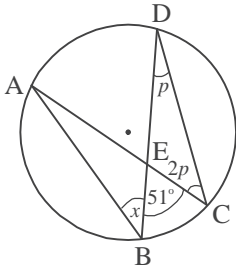
4.

   Pada gambar di samping besar $\angle$ AOB = 120° dan $\angle$ COD = 30°. Jika panjang busur AB = 44 cm maka panjang busur CD adalah ....
   a. 5,5 cm c. 9 cm
   b. 7 cm d. 11 cm

5.

   Jika jari-jari lingkaran di atas 5 cm dan panjang tali busur AB = 6 cm maka panjang apotema OC adalah ....
   a. 3 cm c. 4 cm
   b. 3,5 cm d. 4,5 cm

6.

   Pada gambar di samping, luas juring OPQ = 19,25 cm^2 dan luas juring ORS = 51,33 cm^2. Jika besar $\angle$ POQ = 45° maka besar $\angle$ ROS adalah ....
   a. 90° c. 135°
   b. 120° d. 150°

7.

   Perhatikan gambar di samping. Jika besar $\angle$AOB = 45°, panjang OB = 14 cm, dan OC = CB, luas daerah yang diarsir adalah ....
   a. 55,57 cm^2 c. 57,57 cm^2
   b. 55,77 cm^2 d. 57,75 cm^2

8.

   Perhatikan gambar di atas.
   $\overline{PR}$ adalah garis tengah lingkaran dengan titik pusat O. Jika $\angle$ RPQ = 70° dan $\angle$ PRS = 20°, besar $\angle$ PRQ dan $\angle$ RPS berturut-turut adalah ....
   a. 90° dan 20° c. 20° dan 70°
   b. 20° dan 90° d. 10° dan 80°

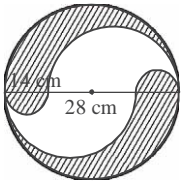
9.

Jika $\angle$ ACD = 2p°, $\angle$ BDC = p°, dan $\angle$ BEC = 51°, besar $\angle$ ABD = ...

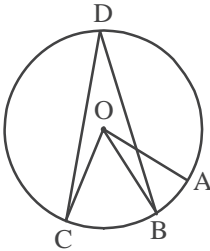
a. 17°
b. 34°
c. 51°
d. 68°

10. Suatu taman bunga berbentuk lingkaran dengan luas 1.386 m^2. Di sekeliling taman itu setiap 4 meter ditanami pohon cemara. Banyak pohon cemara yang dapat ditanam adalah ....

a. 22 buah
b. 33 buah
c. 44 buah
d. 55 buah

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

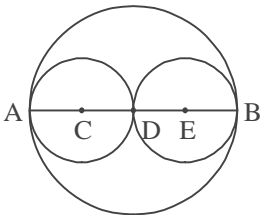
1.

Tentukan keliling dan luas daerah yang diarsir pada gambar di samping.

2.

Pada lingkaran di atas panjang

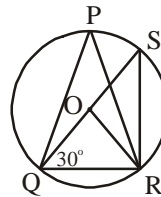
$\overset{\frown}{AB}$ = 10 cm dan $\overset{\frown}{BC}$ = 25 cm.

Jika $\angle$ BDC = 27,5°, tentukan

a. besar $\angle$ AOB;
b. luas juring OAB;
c. luas juring OBC;
d. luas juring besar OAC.

3.

Tiga buah lingkaran saling bersinggungan seperti tampak pada gambar di atas. Jika AC = CD = DE = EB = 3 cm, tentukan

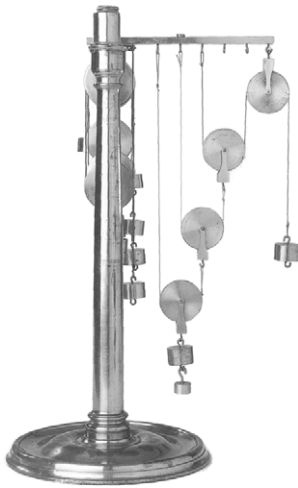
a. perbandingan luas lingkaran kecil dan lingkaran besar;
b. selisih luas lingkaran kecil dan lingkaran besar;
c. perbandingan keliling lingkaran kecil dan lingkaran besar;
d. selisih keliling lingkaran kecil dan lingkaran besar.

4.

Perhatikan gambar di atas.
Jika besar $\angle$ PQR = $\angle$ PRQ maka tentukan besar

a. $\angle$QOR;
b. $\angle$QPR;
c. $\angle$ROS;
d. $\angle$RSO;
e. $\angle$QRS.

5. Sebuah pesawat supersonik mempunyai kecepatan 7.850 km/jam dan beredar mengelilingi bumi dalam satu putaran penuh selama 8 jam. Jika lintasannya berbentuk lingkaran dan jari-jari bumi adalah 6.400 km, tentukan

a. panjang lintasan pesawat tersebut;
b. jarak pesawat ke pusat bumi;
c. tinggi lintasan pesawat dari permukaan bumi.

GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Sumber: *Jendela Iptek,* 2001

Pernahkah kalian memerhatikan sebuah kerekan atau katrol? Gambar di samping adalah alat pada abad ke-18 yang memperagakan daya angkat sebuah kerekan yang prinsip kerjanya menggunakan katrol. Pada alat di samping terdapat beberapa katrol yang masing-masing dihubungkan oleh tali.

Perhatikan bahwa masing-masing tali menyinggung bagian dari katrol, yang bagian bawahnya dihubungkan dengan sebuah pemberat. Dapatkah kalian menentukan panjang tali yang menyinggung tiap katrol tersebut?

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

- ❖ dapat menemukan sifat sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan garis yang melalui titik pusat;
- ❖ dapat mengenali garis singgung persekutuan dalam dan persekutuan luar dua lingkaran;
- ❖ dapat menentukan panjang garis singgung persekutuan dalam dan persekutuan luar dua lingkaran;
- ❖ dapat melukis lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga.

Kata-Kata Kunci:

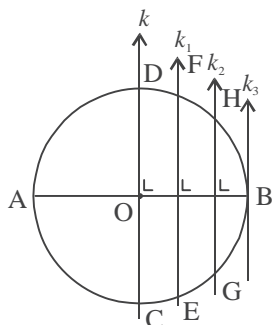
- ❖ sifat garis singgung lingkaran
- ❖ garis singgung persekutuan dalam
- ❖ garis singgung persekutuan luar
- ❖ lingkaran dalam segitiga
- ❖ lingkaran luar segitiga

Sebelum kalian mempelajari materi pada bab berikut, coba kalian ingat kembali materi mengenai segitiga, garis-garis pada segitiga, teorema Pythagoras, dan lingkaran. Materi tersebut akan memudahkan kalian dalam mempelajari materi pada bab ini.

A. MENGENAL SIFAT-SIFAT GARIS SINGGUNG LINGKARAN

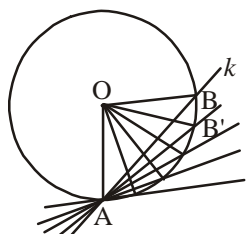
1. Pengertian Garis Singgung Lingkaran

Gambar 7.1

Untuk memahami pengertian garis singgung lingkaran, perhatikan Gambar 7.1 di samping.

Lingkaran pusat di O dengan diameter AB tegak lurus dengan diameter CD (garis *k*). Jika garis *k* digeser ke kanan sedikit demi sedikit sejajar *k* maka

– pada posisi k_1 memotong lingkaran di dua titik (titik E dan F) dengan $k_1 \perp$ OB.
– pada posisi k_2 memotong lingkaran di dua titik (titik G dan H) dengan $k_2 \perp$ OB.
– pada posisi k_3 memotong lingkaran di satu titik, yaitu titik B (menyinggung lingkaran di B).

Selanjutnya, garis k_3 disebut *garis singgung lingkaran*.

Sekarang perhatikan Gambar 7.2.

Gambar 7.2

Jika garis *k* diputar dengan pusat perputaran titik A ke arah busur AB' yang lebih kecil dari busur AB maka kita peroleh $\Delta OAB'$ sama kaki. (Mengapa?)

$$\angle OAB' = \angle OB'A = \frac{1}{2} \times (180° - \angle AOB').$$

Jika kita terus memutar garis *k* ke arah busur yang lebih kecil dan lebih kecil lagi maka $\angle OAB' = \angle OB'A$ akan makin besar dan $\angle AOB'$ makin kecil. Pada suatu saat garis *k* akan menyinggung lingkaran di titik A dengan titik B' berimpit dengan titik A dan saat itu berlaku

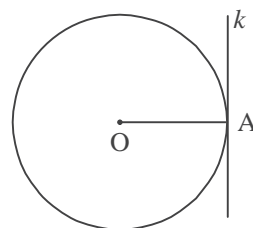
$$\begin{aligned}\angle OAB' = \angle OB'A &= \frac{1}{2} \times (180° - \angle AOB') \\ &= \frac{1}{2} \times (180° \times 0°) \\ &= 90°\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa jari-jari OA tegak lurus dengan garis singgung *k* di titik A.

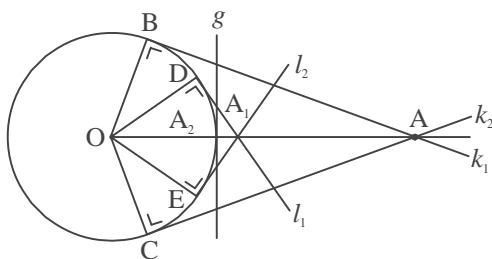
Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong suatu lingkaran di satu titik dan berpotongan tegak lurus dengan jari-jari di titik singgungnya.

Perhatikan Gambar 7.3.

Pada Gambar 7.3 di samping tampak bahwa garis k tegak lurus dengan jari-jari OA. Garis k adalah *garis singgung lingkaran* di titik A, sedangkan A disebut *titik singgung lingkaran*.

Karena garis $k \perp$ OA, hal ini berarti sudut yang dibentuk kedua garis tersebut besarnya 90°. Dengan demikian secara umum dapat dikatakan bahwa setiap sudut yang dibentuk oleh garis yang melalui titik pusat dan garis singgung lingkaran besarnya 90°.

Gambar 7.3

2. Melalui Suatu Titik pada Lingkaran Hanya Dapat Dibuat Satu Garis Singgung pada Lingkaran Tersebut

Perhatikan Gambar 7.4.

Gambar 7.4

Pada Gambar 7.4 di atas, garis k_1 dan k_2 adalah garis singgung lingkaran yang melalui titik A di luar lingkaran dan menyinggung lingkaran di titik B dan C.

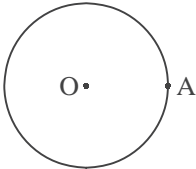
Apabila titik A digeser ke A_1 maka garis k_1 dan k_2 akan bergeser sehingga menjadi garis l_1 dan l_2 yang menyinggung lingkaran di titik D dan E.

Apabila titik A_1 digeser ke A_2 tepat pada keliling lingkaran maka garis l_1 dan l_2 bergeser dan saling berimpit menjadi garis g. Jadi, hanya terdapat satu garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran. Apakah garis $g \perp OA_2$?

(Menumbuhkan kreativitas)

Amati lingkungan di sekitarmu. Carilah benda-benda yang menggunakan prinsip garis singgung lingkaran. Ceritakan hasil temuanmu secara singkat di depan kelas.

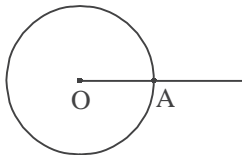
B. MELUKIS DAN MENENTUKAN PANJANG GARIS SINGGUNG LINGKARAN

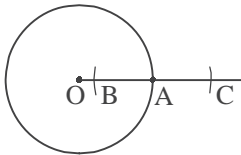
Untuk melukis garis singgung lingkaran melalui suatu titik pada lingkaran dan di luar lingkaran, perhatikan uraian berikut ini.

1. Melukis Garis Singgung Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Salinlah Gambar 7.5 di samping. Kemudian lukislah garis singgung lingkaran yang melalui titik A pada lingkaran di samping.

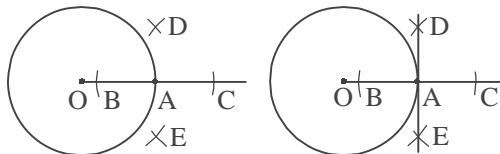
Gambar 7.5

Untuk melukis garis singgung lingkaran yang melalui titik A, langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Lukis jari-jari OA dan perpanjangannya.

Gambar 7.6

b. Lukis busur lingkaran berpusat di A sehingga memotong garis OA dan perpanjangannya di titik B dan C.

Gambar 7.7

c. Lukis busur lingkaran berpusat di titik B dan C sehingga saling berpotongan di titik D dan E.

Hubungkan titik D dan E. Garis DE adalah garis singgung lingkaran di titik A.

Gambar 7.8

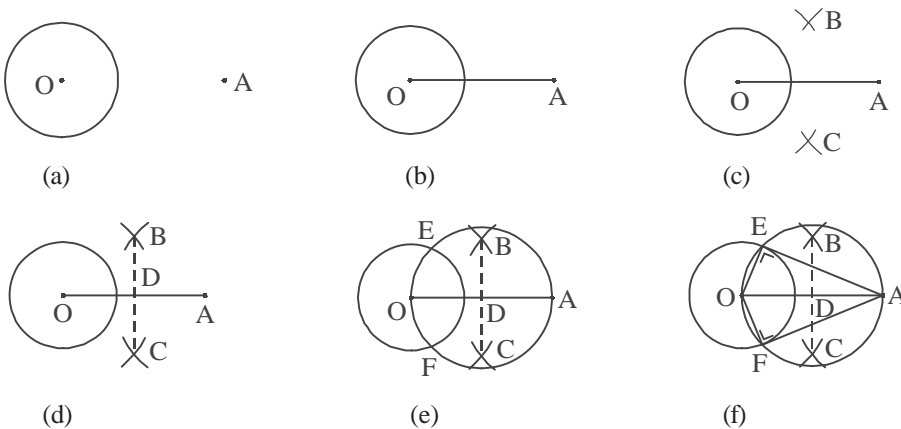
Dari uraian tersebut dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Melalui sebuah *titik pada lingkaran* hanya dapat dibuat *satu garis singgung* pada lingkaran tersebut.

2. Melukis Garis Singgung Melalui Suatu Titik di Luar Lingkaran

Lukislah sebuah lingkaran dengan titik pusat di O dan titik A berada di luar lingkaran. Lukislah garis singgung lingkaran yang melalui titik A di luar lingkaran.

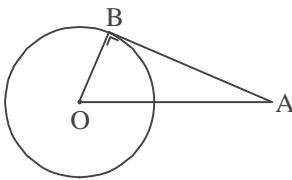
Langkah-langkah melukis garis singgung melalui suatu titik di luar lingkaran sebagai berikut.

a. Lukislah lingkaran titik pusat di O dan titik A di luar lingkaran.
b. Hubungkan titik O dan A.
c. Lukis busur lingkaran dengan pusat di titik O dan titik A sehingga saling berpotongan di titik B dan titik C.
d. Hubungkan BC sehingga memotong garis OA di titik D.
e. Lukis lingkaran berpusat di titik D dan berjari-jari OD = DA sehingga memotong lingkaran pertama di dua titik. Namailah dengan titik E dan F.
f. Hubungkan titik A dengan titik E dan titik A dengan titik F. Garis AE dan EF merupakan *dua garis singgung lingkaran melalui titik A di luar lingkaran*.

Gambar 7.9

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Melalui *sebuah titik di luar lingkaran* dapat dibuat *dua garis singgung* pada lingkaran tersebut.

3. Menentukan Panjang Garis Singgung Lingkaran dari Satu Titik di Luar Lingkaran

Pada pembahasan yang lalu kalian telah mempelajari mengenai teorema Pythagoras. Untuk menentukan panjang garis singgung lingkaran, kalian dapat memanfaatkan teorema ini.

Gambar 7.10

Perhatikan uraian berikut.

Pada Gambar 7.10 di samping, lingkaran berpusat di titik O dengan jari-jari OB dan OB $\perp$ garis AB. Garis AB adalah garis singgung lingkaran melalui titik A di luar lingkaran.

Perhatikan segitiga siku-siku ABO.

Dengan teorema Pythagoras berlaku

$$OB^2 + AB^2 = OA^2$$
$$AB^2 = OA^2 - OB^2$$
$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$$

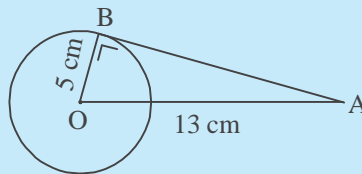
Panjang garis singgung lingkaran (AB) = $\sqrt{OA^2 - OB^2}$.

Diketahui lingkaran berpusat di titik O dengan jari-jari OB = 5 cm. Garis AB adalah garis singgung lingkaran yang melalui titik A di luar lingkaran. Jika jarak OA = 13 cm maka

a. gambarlah sketsanya;

b. tentukan panjang garis singgung AB.

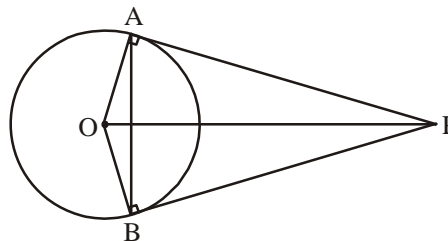
Penyelesaian:

a. Sketsa

b. $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$= \sqrt{169 - 25}$$
$$= \sqrt{144} = 12$$

Jadi, panjang garis singgung AB = 12 cm.

4. Layang-Layang Garis Singgung

Perhatikan Gambar 7.11.

Gambar 7.11

Pada gambar tersebut tampak bahwa garis PA dan PB adalah garis singgung lingkaran yang berpusat di titik O. Dengan demikian $\angle$ OAP = $\angle$ OBP dan AP = BP dengan garis AB merupakan tali busur.

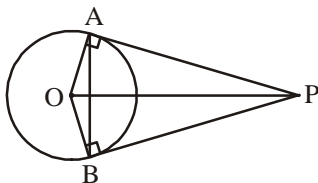
Perhatikan Δ OAB.

Pada Δ OAB, OA = OB = jari-jari, sehingga Δ OAB adalah segitiga sama kaki.

Sekarang, perhatikan Δ ABP.

Pada Δ ABP, PA = PB = garis singgung, sehingga Δ ABP adalah segitiga sama kaki.

Dengan demikian, segi empat OAPB terbentuk dari segitiga sama kaki OAB dan segitiga sama kaki ABP dengan alas AB yang saling berimpit. Oleh karena itu, kita dapat mengatakan bahwa segi empat OAPB merupakan *layang-layang*. Karena sisi layang-layang OAPB terdiri dari *jari-jari lingkaran* dan *garis singgung lingkaran*, maka segi empat OAPB disebut *layang-layang garis singgung*.

a. Dua garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran dan dua jari-jari yang melalui titik singgung dari kedua garis singgung tersebut membentuk bangun layang-layang.
b. Layang-layang yang terbentuk dari dua garis singgung lingkaran dan dua jari-jari yang melalui titik singgung dari kedua garis singgung tersebut disebut layang-layang garis singgung.

Gambar 7.12

Perhatikan gambar di atas. Dari titik P di luar lingkaran yang berpusat di titik O dibuat garis singgung PA dan PB. Jika panjang OA = 9 cm dan OP = 15 cm, hitunglah

Penyelesaian:

Perhatikan Δ OAP.

a. Δ OAP siku-siku di titik A, sehingga

$$\begin{aligned} AP^2 &= OP^2 - OA^2 \\ &= 15^2 - 9^2 \\ &= 225 - 81 \\ &= 144 \\ AP &= \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

a. panjang AP;
b. luas Δ OAP;
c. luas layang-layang OAPB;
d. panjang tali busur AB.

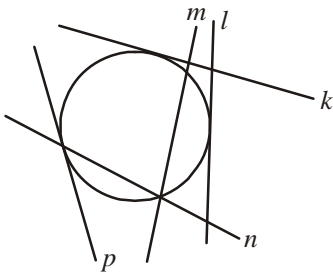
b. Luas Δ OAP $= \frac{1}{2} \times OA \times AP$
$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12$
$= 54 \text{ cm}^2$

c. Luas layang-layang OAPB $= 2 \times \text{luas } \Delta \text{ OAP}$
$= 2 \times 54$
$= 108 \text{ cm}^2$

d. Luas layang-layang OAPB $= \frac{1}{2} \times OP \times AB$
$108 = \frac{1}{2} \times 15 \times AB$
$AB = \frac{108 \times 2}{15}$
$= 14,4 \text{ cm}$

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

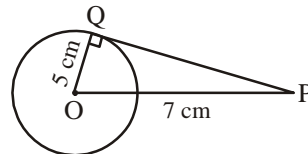
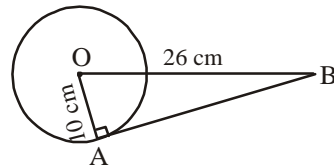
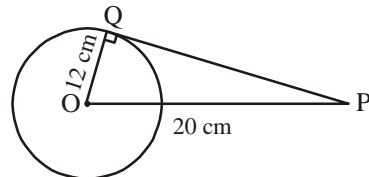
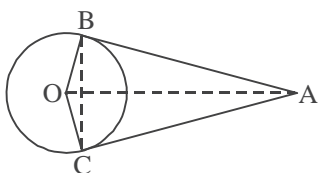
1.

   Dari garis-garis *k*, *l*, *m*, *n*, dan *p* pada gambar di atas, manakah yang merupakan garis singgung lingkaran?
2. Lukislah pada kertas berpetak lingkaran berpusat di titik O(0, 0) dengan jari-jari 5 satuan panjang. Selanjutnya lukislah garis singgung lingkaran yang melalui titik A(0, 5).
3. Lukislah pada kertas berpetak lingkaran dengan pusat di titik P(3, 2) dan jari-jari 4 satuan panjang. Selanjutnya, lukislah garis singgung lingkaran yang melalui titik Q(–1, 2).
4. Berdasarkan keterangan pada gambar berikut, hitunglah panjang setiap garis singgung lingkarannya.

   a.

   b.

   c.

5.

Pada gambar di atas, garis AB dan AC adalah garis singgung lingkaran yang melalui titik A. Jika OB = 10 cm dan OA = 26 cm maka tentukan

a. panjang garis singgung AB;
b. luas layang-layang OBAC;
c. panjang tali busur BC.

C. KEDUDUKAN DUA LINGKARAN

Jika terdapat dua lingkaran masing-masing lingkaran L_1 berpusat di P dengan jari-jari R dan lingkaran L_2 berpusat di Q dengan jari-jari r di mana $R > r$ maka terdapat beberapa kedudukan lingkaran sebagai berikut.

(i) L_2 terletak di dalam L_1 dengan P dan Q berimpit, sehingga panjang PQ = 0. Dalam hal ini dikatakan L_2 terletak di dalam L_1 dan *konsentris* (setitik pusat).

(ii) L_2 terletak di dalam L_1 dan $PQ < r < R$. Dalam hal ini dikatakan L_2 terletak di dalam L_1 dan *tidak konsentris.*

(iii) L_2 terletak di dalam L_1 dan $PQ = r = \frac{1}{2}R$, sehingga L_1 dan L_2 *bersinggungan di dalam*.

(iv) L_1 *berpotongan* dengan L_2 dan $r < PQ < R$.

(v) L_1 *berpotongan* dengan L_2 dan $r < PQ < R + r$.

(vi) L_1 terletak di luar L_2 dan $PQ = R + r$, sehingga L_1 dan L_2 *bersinggungan di luar*.

(vii) L_1 terletak di luar L_2 dan $PQ > R + r$, sehingga L_1 dan L_2 *saling terpisah*.

(i)

PQ = 0

(ii)

$PQ < r < R$

(iii)

$PQ = r = \frac{1}{2}R$

$r < PQ < R$

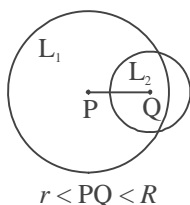
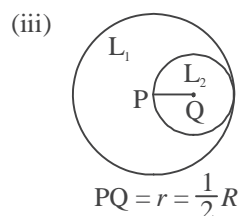
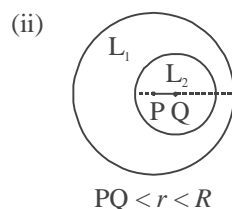
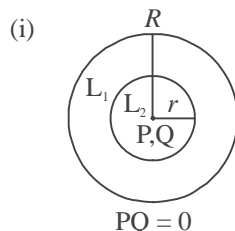
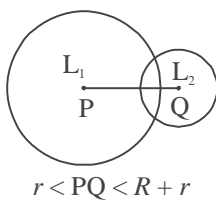
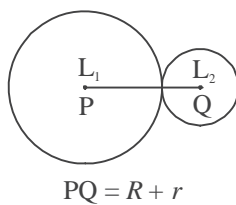
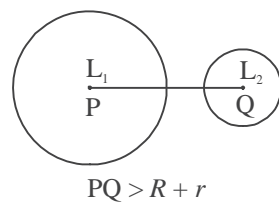
(iv)

$r < PQ < R + r$

(v)

$PQ = R + r$

(vi)

$PQ > R + r$

(vii)

Gambar 7.13

(Menumbuhkan kreativitas)

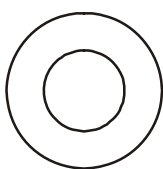
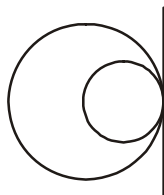
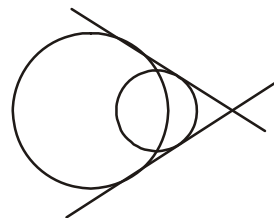
Ambillah dua buah koin yang berbeda ukuran. Peragakanlah kedudukan dua buah lingkaran seperti pada Gambar 7.10. Ceritakan secara singkat di depan kelas.

Pada beberapa kedudukan lingkaran seperti tersebut di atas, dapat dibuat garis singgung persekutuan dua lingkaran. *Garis singgung persekutuan* adalah garis yang menyinggung dua buah lingkaran sekaligus.

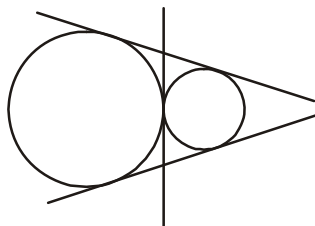
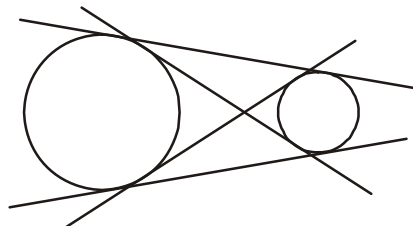
Apakah untuk setiap dua lingkaran selalu dapat dibuat garis singgung persekutuan? Perhatikan kemungkinan berikut.

(i) Pada Gambar 7.14 kedua lingkaran tidak mempunyai garis singgung persekutuan.

(ii) Pada Gambar 7.15 kedua lingkaran mempunyai satu garis singgung persekutuan.

(iii) Pada Gambar 7.16 kedua lingkaran mempunyai dua garis singgung persekutuan.

Gambar 7.14

Gambar 7.15

Gambar 7.16

(iv) Pada Gambar 7.17 kedua lingkaran mempunyai tiga garis singgung persekutuan.

(v) Pada Gambar 7.19 kedua lingkaran mempunyai empat garis singgung persekutuan.

Gambar 7.17

Gambar 7.18

D. GARIS SINGGUNG PERSEKUTUAN DUA LINGKARAN

Pada bagian depan kalian telah mempelajari cara melukis dan menentukan panjang garis singgung pada sebuah lingkaran. Sekarang, kalian akan mempelajari cara melukis dan menentukan panjang garis singgung pada dua buah lingkaran. Ada dua macam garis singgung persekutuan dua lingkaran, yaitu garis singgung persekutuan dalam dan garis singgung persekutuan luar. Agar kalian dapat memahaminya pelajari uraian berikut ini.

1. Melukis Garis Singgung Persekutuan Dalam Dua Lingkaran

Langkah-langkah melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran sebagai berikut.

(a) Lukis lingkaran L_1 berpusat di titik P dengan jari-jari R dan lingkaran L_2 berpusat di titik Q dengan jari-jari r ($R > r$). Selanjutnya, hubungkan titik P dan Q.

(b) Lukis busur lingkaran berpusat di titik P dan Q sehingga saling berpotongan di titik R dan S.

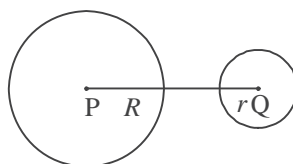
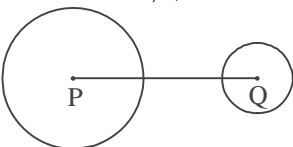
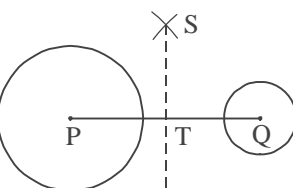
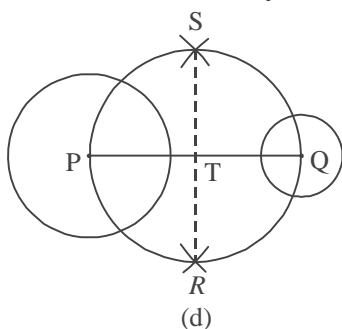
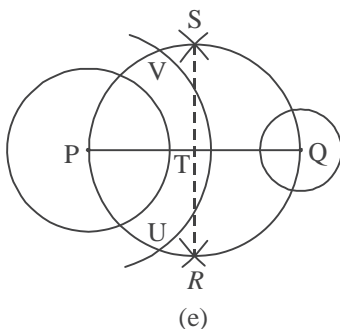
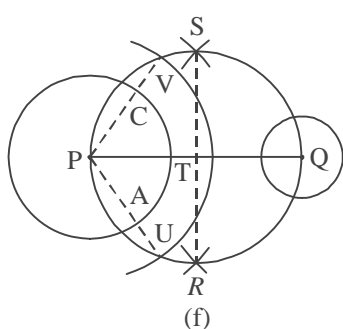
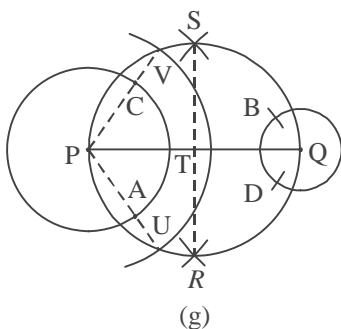
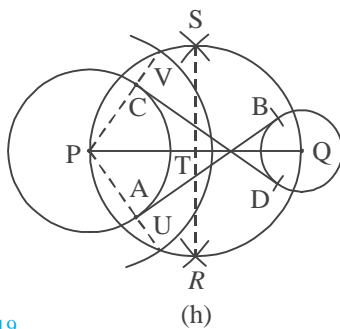
(c) Hubungkan titik R dengan titik S sehingga memotong garis PQ di titik T.

(d) Lukis busur lingkaran berpusat di titik T dan berjari-jari PT.

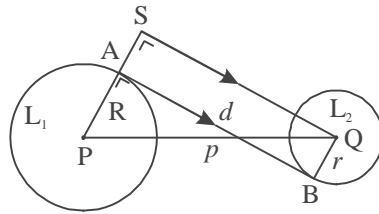
(e) Lukis busur lingkaran pusat di titik P, jari-jari $R + r$ sehingga memotong lingkaran berpusat titik T di titik U dan V.

(f) Hubungkan titik P dan U sehingga memotong lingkaran L_1 di titik A. Hubungkan pula titik P dan V sehingga memotong lingkaran L_1 di titik C.

(g) Lukis busur lingkaran pusat di titik A, jari-jari UQ sehingga memotong lingkaran L_2 di titik B. Lukis pula busur lingkaran pusat di titik C jari-jari VQ sehingga memotong lingkaran L_2 di titik D.

(h) Hubungkan titik A dengan titik B dan titik C dengan titik D. Garis AB dan CD merupakan *garis singgung persekutuan* dalam lingkaran L_1 dan L_2.

Gambar 7.19

2. Panjang Garis Singgung Persekutuan Dalam Dua Lingkaran

Untuk menentukan panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran, kalian dapat memanfaatkan teorema Pythagoras.

Gambar 7.20

Pada Gambar 7.20 di atas, dua buah lingkaran L_1 dan L_2 berpusat di P dan Q, berjari-jari R dan r.

Dari gambar tersebut diperoleh

jari-jari lingkaran yang berpusat di P = R;

jari-jari lingkaran yang berpusat di Q = r;

panjang garis singgung persekutuan dalam adalah AB = d;

jarak titik pusat kedua lingkaran adalah PQ = p.

Jika garis AB digeser sejajar ke atas sejauh BQ maka diperoleh garis SQ.

Garis SQ sejajar AB, sehingga $\angle$ PSQ = $\angle$ PAB = 90° (sehadap).

Perhatikan segi empat ABQS.

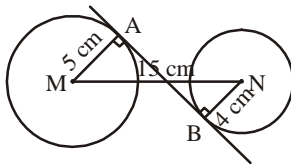
Garis AB//SQ, AS//BQ, dan $\angle$ PSQ = $\angle$ PAB = 90°.

Jadi, segi empat ABQS merupakan persegi panjang dengan panjang AB = d dan lebar BQ = r.

Perhatikan bahwa Δ PQS siku-siku di titik S. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$\begin{aligned} QS^2 &= PQ^2 - PS^2 \\ QS &= \sqrt{PQ^2 - PS^2} \\ QS &= \sqrt{PQ^2 - (R+r)^2} \end{aligned}$$

Karena panjang QS = AB, maka rumus panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran (d) dengan jarak kedua titik pusat p, jari-jari lingkaran besar R, dan jari-jari lingkaran kecil r adalah

$$d = \sqrt{p^2 - (R+r)^2}$$

Gambar 7.21

Pada gambar di atas, panjang jari-jari MA = 5 cm, panjang jari-jari NB = 4 cm, dan panjang MN = 15 cm. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan dalamnya.

Penyelesaian:

Diketahui MA = 5 cm, NB = 4 cm, dan MN = 15 cm.

Garis singgung persekutuan dalamnya adalah AB.

$$AB = \sqrt{MN^2 - (MA + NB)^2}$$

$$= \sqrt{15^2 - (5 + 4)^2}$$

$$= \sqrt{225 - 81}$$

$$= \sqrt{144}$$

$$= 12$$

Jadi, panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah 12 cm.

3. Melukis Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran

Langkah-langkah melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran sebagai berikut.

(a) Lukis lingkaran L_1 dengan pusat di P berjari-jari R dan lingkaran L_2 pusat di Q berjari-jari r ($R > r$). Hubungkan titik P dan Q.

(b) Lukis busur lingkaran dengan pusat di P dan Q sehingga saling berpotongan di titik R dan S.

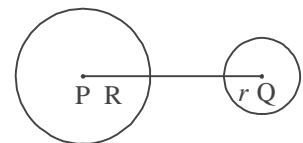
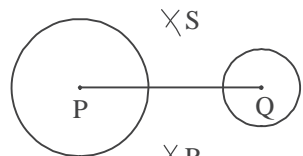
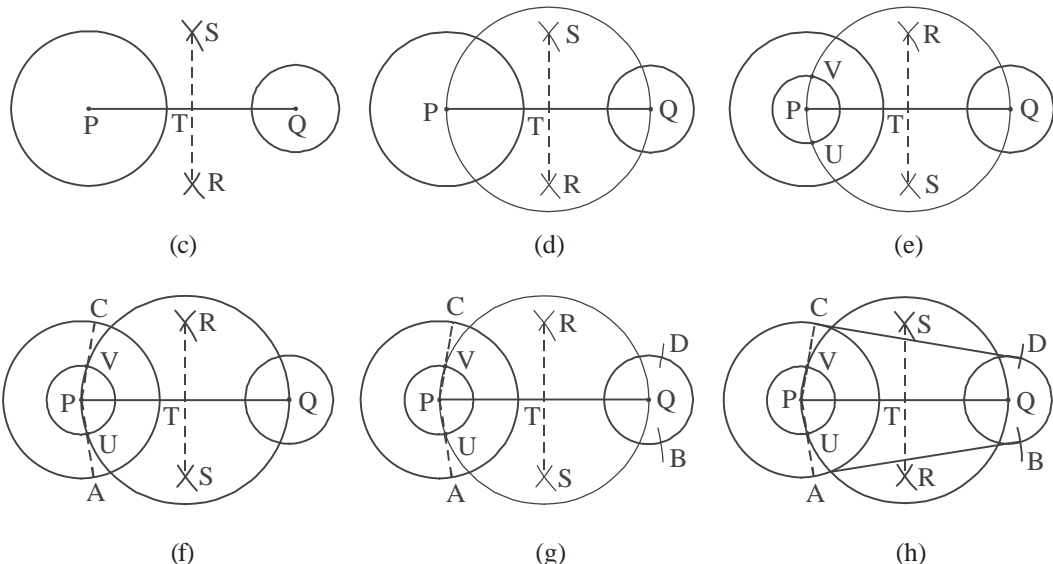
(c) Hubungkan RS sehingga memotong PQ di titik T.

(d) Lukis busur lingkaran dengan pusat di T dan berjari-jari PT.

(e) Lukis busur lingkaran dengan pusat di P, berjari-jari $R - r$ sehingga memotong lingkaran berpusat T di U dan V.

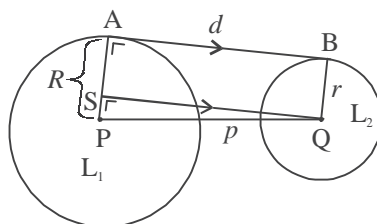
(f) Hubungkan P dan U, perpanjang sehingga memotong lingkaran L_1 di titik A. Hubungkan pula P dan V, perpanjang sehingga memotong lingkaran L_1 di titik C.

(g) Lukis busur lingkaran dengan pusat di A, jari-jari UQ sehingga memotong lingkaran L_2 di titik B. Lukis pula busur lingkaran pusat di C, jari-jari VQ sehingga memotong lingkaran L_2 di titik D.

(h) Hubungkan titik A dengan titik B dan titik C dengan titik D. Garis AB dan CD merupakan *garis singgung persekutuan luar lingkaran* L_1 dan L_2.

(a)

(b)

Gambar 7.22

4. Panjang Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran

Kalian telah mempelajari cara melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran. Sekarang, kalian akan menentukan panjang garis singgung persekutuan luar tersebut.

Perhatikan Gambar 7.23.

Gambar 7.23

Dari gambar tersebut diperoleh

jari-jari lingkaran yang berpusat di P = R;

jari-jari lingkaran yang berpusat di Q = r;

panjang garis singgung persekutuan luar adalah AB = d;

jarak titik pusat kedua lingkaran adalah PQ = p.

Jika garis AB kita geser sejajar ke bawah sejauh BQ maka diperoleh garis SQ.

Garis AB sejajar SQ, sehingga $\angle$ PSQ = $\angle$ PAB = 90^o (sehadap).

Perhatikan segi empat ABQS.

Garis AB//SQ, AS//BQ, dan $\angle$PSQ = $\angle$PAB = 90^o.

Δ PQS siku-siku di S, sehingga berlaku

$$QS^2 = PQ^2 - PS^2$$
$$QS = \sqrt{PQ^2 - PS^2}$$
$$QS = \sqrt{PQ^2 - (R-r)^2}$$

Karena QS = AB = *d*, maka rumus panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran (*d*) dengan jarak kedua titik pusat *p*, jari-jari lingkaran besar *R*, dan jari-jari lingkaran kecil *r* adalah

$$d = \sqrt{p^2 - (R-r)^2}$$

Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah 12 cm. Jarak kedua pusat lingkaran tersebut 13 cm. Jika panjang salah satu jari-jari lingkaran $3\frac{1}{2}$ cm, hitunglah panjang jari-jari lingkaran yang lain.

Penyelesaian:

Panjang garis singgung persekutuan luar adalah 12 cm, maka *d* = 12.

Jarak kedua pusat lingkaran adalah 13 cm, maka *p* = 13.

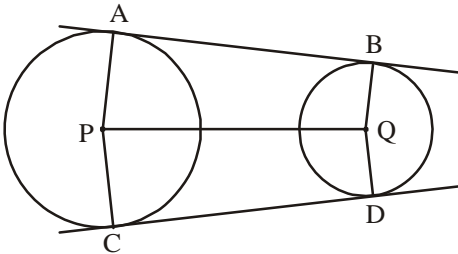
Panjang salah satu jari-jari lingkaran adalah 3,5 cm, sehingga *r* = 3,5.

Panjang jari-jari lingkaran yang lain = *R*, sehingga

$$d = \sqrt{p^2 - (R-r)^2}$$
$$12 = \sqrt{13^2 - (R-3,5)^2}$$
$$12^2 = 13^2 - (R-3,5)^2$$
$$144 = 169 - (R-3,5)^2$$
$$(R-3,5)^2 = 25$$
$$R-3,5 = \sqrt{25}$$
$$R-3,5 = 5$$
$$R = 5 + 3,5 = 8,5 \text{ cm}$$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1.

   Perhatikan gambar di atas.

   Berdasarkan gambar tersebut, benar atau salahkah pernyataan-pernyataan berikut?

   a. $\overline{AB}$ sejajar $\overline{PQ}$

   b. $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$

   c. $\overline{AB} = \overline{CD}$

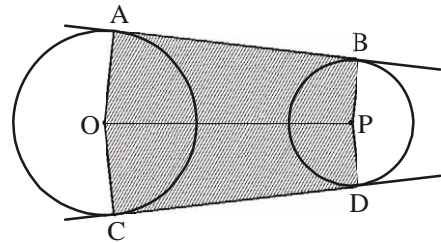
   d. $\overline{AB} = \overline{PQ}$

   e. $\overline{AP} \perp \overline{AB}$ di titik A

2. Panjang jari-jari dua lingkaran masing-masing adalah 12 cm dan 5 cm. Jarak kedua titik pusatnya adalah 24 cm. Hitunglah

   a. panjang garis singgung persekutuan dalam;

   b. panjang garis singgung persekutuan luarnya.

3.

   Perhatikan gambar di atas.

   Panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di O adalah 9 cm dan panjang jari-jari lingkaran yang berpusat di P adalah 4 cm. Jika panjang garis singgung persekutuan luarnya 12 cm, tentukan

   a. jarak kedua pusat lingkaran;

   b. luas segi empat yang diarsir.

4. Panjang garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran adalah 24 cm dan jarak kedua pusatnya adalah 26 cm. Jika panjang salah satu jari-jari lingkaran 6 cm, hitunglah panjang jari-jari lingkaran yang lain.

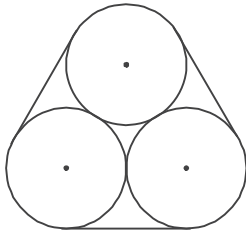
5. Panjang jari-jari dua buah lingkaran yang berpusat di O dan P masing-masing adalah 8 cm dan 4 cm. Jarak kedua titik pusatnya 20 cm.

   a. Lukislah garis singgung persekutuan dalamnya.

   b. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan dalam tersebut.

E. MENENTUKAN PANJANG SABUK LILITAN MINIMAL YANG MENGHUBUNGKAN DUA LINGKARAN

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai seorang tukang bangunan mengikat beberapa pipa air untuk memudahkan mengangkat. Mungkin juga beberapa tong minyak kosong

dikumpulkan menjadi satu untuk diisi kembali. Kali ini kalian akan mempelajari cara menghitung panjang tali minimal yang dibutuhkan untuk mengikat barang-barang tersebut agar memudahkan pekerjaan.

Gambar 7.24

Gambar 7.24 di atas menunjukkan penampang tiga buah pipa air berbentuk lingkaran yang masing-masing berjari-jari 7 cm dan diikat menjadi satu. Hitunglah panjang sabuk lilitan minimal yang diperlukan untuk mengikat tiga pipa tersebut.

Penyelesaian:

Gambar 7.25

Hubungkan titik pusat ketiga lingkaran dan titik pusat dengan tali yang melingkarinya, seperti pada Gambar 7.25, sehingga diperoleh panjang DE = FG = HI = AB = AC = BC = 2 × jari-jari = 14 cm.

Segitiga ABC sama sisi, sehingga

$\angle$ ABC = $\angle$ BAC = $\angle$ ACB = 60º;

$\angle$ CBF = $\angle$ ABE = 90º (siku-siku);

$\angle$ FBE = $\angle$GCH = $\angle$DAI = 360º – (60º + 90º + 90º) = 120º

Ingat kembali materi pada bab sebelumnya mengenai lingkaran, bahwa panjang busur lingkaran =

$\dfrac{\text{sudut pusat}}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$, sehingga diperoleh

panjang $\overset{\frown}{EF}$ = panjang $\overset{\frown}{GH}$ = panjang $\overset{\frown}{DI}$

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= \frac{1}{3} \times 44$$

$$= \frac{44}{3} \text{ cm}$$

Panjang sabuk lilitan minimal

= DE + FG + HI + panjang $\overset{\frown}{EF}$ + panjang $\overset{\frown}{GH}$ + panjang $\overset{\frown}{DI}$

(Menumbuhkan inovasi)

Amatilah lingkungan di sekitarmu. Temukan pemanfaatan sabuk lilitan minimal pada benda-benda di sekitarmu. Lalu, hitunglah panjang sabuk lilitan minimal yang digunakan untuk mengikat benda-benda tersebut. Tulislah hasilnya dalam bentuk laporan dan serahkan kepada gurumu.

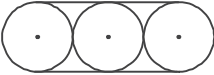
$$= (3 \times \text{panjang DE}) + (3 \times \text{panjang } \overset{\frown}{EF})$$

$$= 3 \times 14 + 3 \times \frac{44}{3}$$

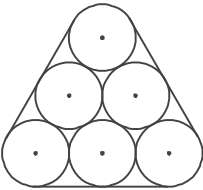
$$= 42 + 44$$

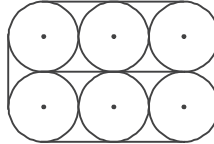
$$= 86 \text{ cm}$$

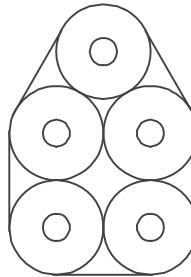
Uji Kompetensi 3

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Gambar di atas adalah penampang tiga buah pipa air yang berbentuk tabung dengan diameter 14 cm. Berapakah panjang tali minimal untuk mengikat tiga buah pipa dengan susunan tersebut?

2. Dua buah kayu berpenampang lingkaran diikat dengan tali yang panjangnya 144 cm. Jika jari-jarinya sama panjang maka tentukan panjang jari-jari kedua kayu.

3.

   Gambar di atas adalah penampang enam buah drum yang berbentuk tabung dengan jari-jari 24 cm. Hitunglah panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat enam buah drum tersebut.

4.

   Gambar di atas adalah penampang enam buah kaleng yang berbentuk tabung dengan jari-jari 10 cm. Hitunglah panjang tali minimal yang diperlukan untuk mengikat enam buah kaleng tersebut.

5.

   Lima buah pipa air disusun seperti pada gambar di atas. Hitunglah panjang tali yang digunakan untuk melilitkan pipa-pipa tersebut jika jari-jari pipa 3 cm.

Tugas Mandiri

(Menumbuhkan kreativitas)

Gambarlah dua buah lingkaran berpusat di P dan Q, berjari-jari 8 cm dan 3 cm dengan jarak PQ = 13 cm. Lukislah garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut, kemudian tentukan panjang garis singgung tersebut berdasarkan

a. pengukuran,   b. perhitungan.

Berapa selisih hasil a dan b? Buatlah kesimpulannya.

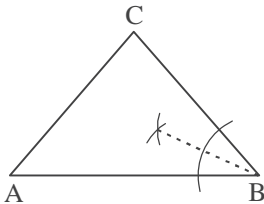
F. MELUKIS LINGKARAN DALAM DAN LINGKARAN LUAR SEGITIGA

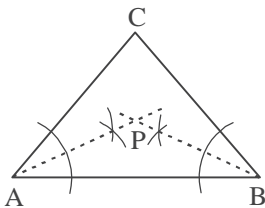
1. Melukis Lingkaran Dalam Segitiga

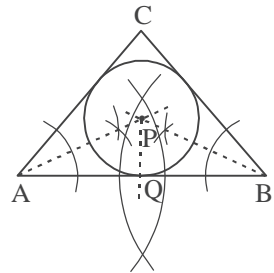
Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang terletak di dalam segitiga dan menyinggung ketiga sisinya.

Titik pusat lingkaran dalam segitiga merupakan titik potong ketiga garis bagi sudut suatu segitiga. Coba kalian ingat kembali pengertian garis bagi suatu segitiga dan cara melukisnya.

Langkah-langkah melukis lingkaran dalam segitiga sebagai berikut.

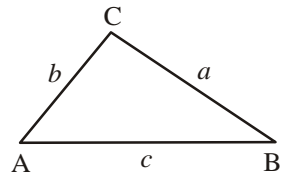
(a) Lukis Δ ABC, kemudian lukis garis bagi $\angle$ ABC.

Gambar 7.26

(b) Lukis pula garis bagi $\angle$CAB sehingga kedua garis bagi berpotongan di titik P.

Gambar 7.27

(c) Lukis garis PQ $\perp$ AB sehingga memotong garis AB di titik Q. Lukis lingkaran berpusat di titik P dengan jari-jari PQ. Lingkaran tersebut merupakan lingkaran dalam Δ ABC.

Gambar 7.28

2. Menentukan Panjang Jari-jari Lingkaran Dalam Segitiga

Selanjutnya, mari kita temukan panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga. Namun, terlebih dahulu akan kita ingat kembali rumus keliling dan luas segitiga.

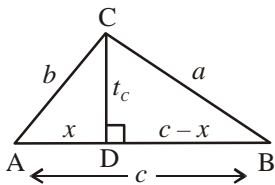
Perhatikan Δ ABC pada Gambar 7.29.
Panjang sisi di hadapan $\angle$ A dinyatakan dengan *a*.
Panjang sisi di hadapan $\angle$ B dinyatakan dengan *b*.
Panjang sisi di hadapan $\angle$ C dinyatakan dengan *c*.
Keliling segitiga adalah jumlah seluruh panjang sisi segitiga.

Gambar 7.29

Jika keliling Δ ABC dinyatakan dengan $2s$ maka

$$K = a + b + c$$
$$2s = a + b + c$$
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Di kelas VII, kalian telah mempelajari rumus luas segitiga yang diketahui panjang alas dan tingginya, yaitu

$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$
$$= \frac{1}{2} \times a \times t$$

Kali ini, kita akan menentukan rumus luas segitiga yang dinyatakan dengan keliling segitiga. Dalam hal ini, kita akan menentukan rumus luas segitiga yang diketahui panjang ketiga sisinya dengan memanfaatkan rumus $s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga = $\frac{1}{2}(a + b + c)$.

Gambar 7.30

Sekarang, perhatikan Δ ABC pada Gambar 7.30.

Pada gambar tersebut, garis tinggi CD dinyatakan dengan t_C dan panjang AD dinyatakan dengan x. Karena diketahui panjang AB = c, maka panjang DB = $c - x$.

Perhatikan bahwa Δ ADC siku-siku di titik D, sehingga diperoleh $CD^2 = AC^2 - AD^2$

$$t_C^2 = b^2 - x^2 \quad \text{.......... (i)}$$

Sekarang, perhatikan Δ BDC pada Gambar 7.30.

Δ BDC siku-siku di titik D, sehingga diperoleh

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$
$$a^2 = t_C^2 + (c - x)^2$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2 \quad \rightarrow \quad t_C^2 = b^2 - x^2$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$
$$2cx = b^2 + c^2 - a^2$$
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{.......... (ii)}$$

Jadi, panjang AD = $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Selanjutnya, dengan memanfaatkan rumus tersebut, kita akan menentukan rumus garis tinggi t_C.

Berdasarkan persamaan (i) dan (ii) diperoleh

$$
\begin{aligned}
{t_C}^2 &= b^2 - x^2 \\
&= b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 \\
&= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \rightarrow \text{Ingat bahwa } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\
&= \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2)}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\right)\left(a^2-(b^2-2bc+c^2)\right) \\
&= \left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{\left((b+c)+a\right)\left((b+c)-a\right)}{2c}\right)\left(\frac{\left(a+(b-c)\right)\left(a-(b-c)\right)}{2c}\right) \\
&= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4c^2} \\
&= \frac{2s(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)}{4c^2} \quad \rightarrow \text{ Ingat bahwa } 2s = a + b + c. \\
&= \frac{2s \times 2(s-a) \times 2(s-c) \times 2(s-b)}{4c^2} \\
&= \frac{16s(s-a)(s-c)(s-b)}{4c^2} \\
{t_C}^2 &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2} \\
t_C &= \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}} \\
&= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh rumus garis tinggi t_C adalah $t_C = \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Dengan demikian, rumus luas Δ ABC adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} \\ &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times t_{\mathrm{C}} \\ &= \frac{1}{2} \times c \times \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Jadi, luas segitiga yang diketahui panjang ketiga sisinya dapat ditentukan dengan rumus $\mathrm{L} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

dengan L = luas segitiga

$s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga; dan

a, b, c adalah panjang sisi-sisi segitiga.

Selanjutnya, rumus luas segitiga tersebut digunakan untuk menentukan rumus panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga. Pelajari uraian berikut.

Perhatikan Gambar 7.31.

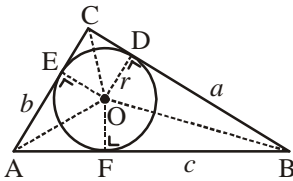
Gambar 7.31

Pada gambar tersebut lingkaran dengan pusat di titik O adalah lingkaran dalam dari Δ ABC. Perhatikan bahwa Δ ABC terbentuk dari Δ AOC, Δ AOB, dan Δ BOC.

Misalkan panjang sisi BC = a, AC = b, AB = c, jari-jari lingkaran = OD = OE = OF = r, keliling Δ ABC = AB + BC + AC = 2s, dan luas Δ ABC = L.

Dengan demikian,

$$\text{luas } \Delta\,\mathrm{ABC} = \text{luas } \Delta\,\mathrm{AOC} + \text{luas } \Delta\,\mathrm{AOB} + \text{luas } \Delta\,\mathrm{BOC}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{OE}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{OF}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{OD}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times r\right) + \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times r\right) + \left(\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times r\right) \\ &= \frac{1}{2}\times r\left(\mathrm{AC}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times r\left(b+c+a\right) \\ &= \frac{1}{2}\times r\left(a+b+c\right) \\ &= rs \end{aligned}$$

$$r = \frac{L}{s}$$

$$\text{atau } r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa rumus panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah

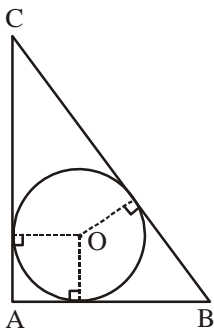
$$r = \frac{L}{s} \text{ atau } r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

dengan

r = panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga

s = $\frac{1}{2}$ keliling segitiga

L = luas segitiga

a, b, c adalah panjang sisi-sisi segitiga

Gambar 7.32

Pada gambar di atas, lingkaran yang berpusat di O merupakan lingkaran dalam Δ ABC. Jika panjang AB = 3 cm, AC = 4 cm, dan Δ ABC siku-siku di A, tentukan panjang jari-jari lingkaran dalam Δ ABC.

Penyelesaian:

AB = 3 cm, maka c = 3.

AC = 4 cm, maka b = 4.

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Jadi, panjang BC = a = 5 cm.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a+b+c) \\ &= \frac{1}{2}(5+4+3) \\ &= \frac{1}{2} \times 12 = 6 \end{aligned}$$

Karena Δ ABC siku-siku di titik A, maka luas Δ ABC adalah

$$\text{luas segitiga} = L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ cm}^2$$

Panjang jari-jari lingkaran dalam Δ ABC adalah

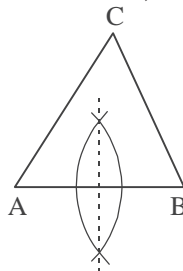
$$r = \frac{L}{s}$$

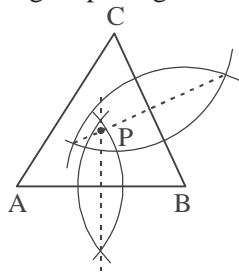
$$= \frac{6}{6} = 1 \text{cm}$$

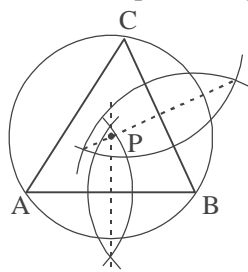
3. Melukis Lingkaran Luar Segitiga

Lingkaran luar segitiga adalah lingkaran yang terletak di luar segitiga dan melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut. Titik pusat lingkaran luar segitiga adalah titik potong ketiga garis sumbu sisi-sisi segitiga. Coba kalian ingat kembali pengertian garis sumbu dan cara melukisnya.

Langkah-langkah melukis lingkaran luar segitiga sebagai berikut.

(a) Lukis Δ ABC, kemudian lukis garis sumbu sisi AB.

Gambar 7.33

(b) Lukis pula garis sumbu sisi BC, sehingga kedua garis sumbu saling berpotongan di titik P.

Gambar 7.34

(c) Lukis lingkaran berpusat di P dengan jari-jari PB. Lingkaran tersebut merupakan lingkaran luar Δ ABC.

Gambar 7.35

4. Menentukan Panjang Jari-jari Lingkaran Luar Segitiga

Untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga, perhatikan Gambar 7.36. Pada gambar tersebut, lingkaran yang berpusat di titik O adalah lingkaran luar Δ ABC.

Gambar 7.36

Misalkan

OB = OC = OE = r;

BC = a, AC = b, AB = c;

luas Δ ABC = L.

Tariklah garis tinggi CD dan diameter CE.

Amatilah Δ ADC dan Δ EBC.

$\angle$ CAD = $\angle$ CEB (sudut keliling yang menghadap busur yang sama) dan $\angle$ ADC = $\angle$ EBC (siku-siku). Akibatnya $\angle$ ACD = $\angle$ ECB.

Hal itu menunjukkan bahwa Δ ADC sebangun dengan Δ EBC, sehingga diperoleh perbandingan sebagai berikut.

$$\frac{AC}{EC} = \frac{CD}{CB}$$

$$CD = \frac{AC \times CB}{EC} \quad \text{...(i)}$$

$$EC = \frac{AC \times CB}{CD} \quad \text{...(ii)}$$

Di lain pihak, kita memperoleh

$$\text{luas } \Delta\, ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

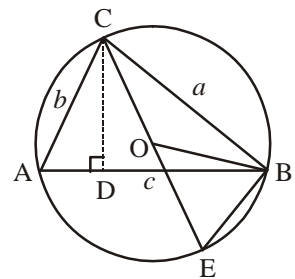
$$2L = AB \times CD$$

$$CD = \frac{2L}{AB} \quad \text{...(iii)}$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (iii) ke persamaan (ii), kita peroleh

$$EC = \frac{AC \times CB}{\frac{2L}{AB}}$$

$$2r = \frac{AC \times CB \times AB}{2L} \text{.............(karena EC} = d = 2r)$$

$$r = \frac{b \times a \times c}{4L} \quad \text{atau} \quad r = \frac{a \times b \times c}{4L}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa rumus panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah

$$r = \frac{abc}{4L} \text{ atau } r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

dengan

r = jari-jari lingkaran luar Δ ABC

a, b, dan c = panjang sisi Δ ABC

L = luas Δ ABC

$s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga

Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 13 cm, 14 cm, dan 15 cm. Hitungah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan a = 13, b = 14, dan c = 15.

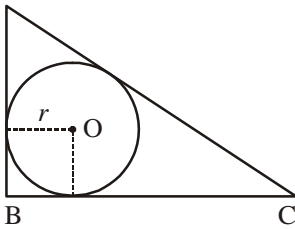
$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a+b+c) \\ &= \frac{1}{2}(13+14+15) \\ &= \frac{1}{2}\times 42 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\ &= \frac{13\times 14\times 15}{4\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}} \\ &= \frac{13\times 14\times 15}{4\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}} \\ &= \frac{13\times 14\times 15}{4\sqrt{7\times 3\times 2\times 2^2\times 7\times 2\times 3}} \\ &= \frac{13\times 14\times 15}{4\sqrt{7^2\times 3^2\times 2^2\times 2^2}} \\ &= \frac{13\times 14\times 15}{4\times 7\times 3\times 2\times 2} \\ &= 8{,}125 \end{aligned}$$

Jadi, panjang jari-jari lingkaran luar segitiga = 8,125 cm.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

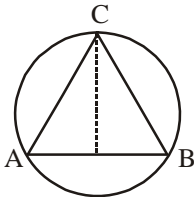
1.

   Perhatikan gambar di atas.

   Jika panjang AB = 8 cm, BC = 9 cm, dan AC = $\sqrt{145}$ cm, tentukan

   a. luas Δ ABC;

   b. keliling Δ ABC;

   c. panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC.

2.

   Pada gambar di atas, diketahui panjang AB = BC = AC = 9 cm. Tentukan

   a. luas Δ ABC;

   b. panjang jari-jari lingkaran luar Δ ABC.

3. Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah 26 cm dan panjang salah satu sisi siku-sikunya 10 cm. Tentukan

   a. panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga;

   b. panjang jari-jari lingkaran luar segitiga.

4. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 26 cm, 28 cm, dan 38 cm. Hitunglah

   a. panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga;

   b. panjang jari-jari lingkaran luar segitiga.

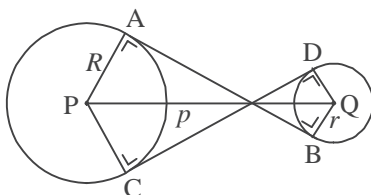
5. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 8 cm, 15 cm, dan 17 cm. Hitunglah

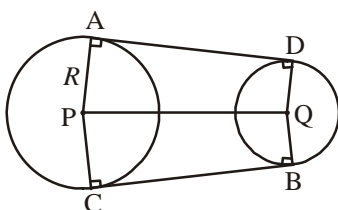
   a. panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga;

   b. panjang jari-jari lingkaran luar segitiga.

Rangkuman

1. Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong suatu lingkaran di satu titik dan berpotongan tegak lurus dengan jari-jari di titik singgungnya.
2. Melalui sebuah titik pada lingkaran hanya dapat dibuat satu garis singgung pada lingkaran tersebut.
3. Melalui sebuah titik di luar lingkaran dapat dibuat dua garis singgung pada lingkaran tersebut.
4. Dua garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran dan dua jari-jari yang melalui titik singgung dari kedua garis singgung tersebut membentuk bangun layang-layang.

5. Layang-layang yang terbentuk dari dua garis singgung lingkaran dan dua jari-jari yang melalui titik singgung dari kedua garis singgung tersebut disebut layang-layang garis singgung.
6. Panjang garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran.

$$AB = CD = \sqrt{p^2 - (R + r)^2}$$

7. Panjang garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran.

$$AD = CB = \sqrt{p^2 - (R - r)^2}$$

8. Panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah

$$r = \frac{L}{s} \text{ atau } r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

dengan r = panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga

$s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga

L = luas segitiga

a, b, c = panjang sisi-sisi segitiga

9. Panjang jari-jari lingkaran luar segitiga adalah

$$r = \frac{abc}{4L} \text{ atau } r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

dengan r = panjang jari-jari lingkaran luar segitiga

a, b, c = panjang sisi-sisi segitiga

L = luas segitiga

$s = \frac{1}{2}$ keliling segitiga

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, bagaimana pemahaman kalian mengenai *Garis Singgung Lingkaran*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi tersebut dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada gurumu. Catat pula manfaat apa saja yang dapat kalian peroleh dari materi ini. Buatlah dalam sebuah laporan dan serahkan kepada gurumu.

Evaluasi 7

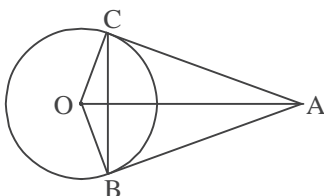
Kerjakan di buku tugasmu.

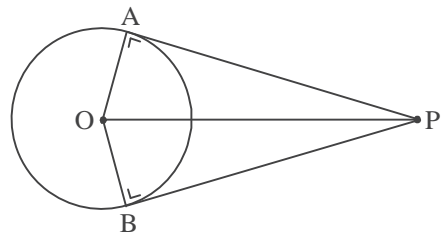
A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1. Panjang garis singgung lingkaran berjari-jari 6 cm dari titik di luar lingkaran yang berjarak 10 cm dari pusat lingkaran adalah ....
   a. 6,5 cm c. 7,5 cm
   b. 7 cm d. 8 cm

2. Dari titik P di luar lingkaran yang berpusat di O dibuat garis singgung PA. Jika panjang jari-jari 20 cm dan jarak AP = 21 cm maka panjang OP adalah ....
   a. 23 cm c. 28 cm
   b. 25 cm d. 29 cm

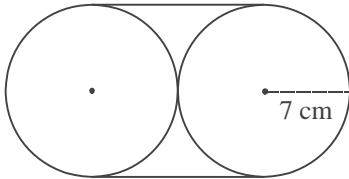
3. Dua lingkaran dengan pusat P dan Q, berjari-jari 7 cm dan 5 cm. Jika jarak PQ = 20 cm maka panjang garis singgung persekutuan dalamnya adalah ....
   a. 12 cm c. 16 cm
   b. 15 cm d. 24 cm

4.

   Pada gambar di atas AB dan AC adalah garis singgung lingkaran titik A di luar lingkaran. Jika panjang OC = x cm, AC = y cm, dan OA = z cm panjang BC = ...
   a. $\frac{xy}{2}$ cm c. $\frac{2xy}{z}$ cm
   b. $\frac{xy}{z}$ cm d. $\frac{2z}{xy}$ cm

Gambar di bawah ini untuk soal nomor 5–7.

5. Diketahui PA dan PB adalah garis singgung lingkaran. Jika panjang OA = 6 cm, OP = 10 cm maka panjang PA = ...
   a. 11 cm c. 12 cm
   b. 8 cm d. 9 cm

6. Luas layang-layang OAPB adalah ....
   a. 46 cm^2 c. 48 cm^2
   b. 45 cm^2 d. 50 cm^2

7. Panjang tali busur AB adalah ....
   a. 6,9 cm c. 6,1 cm
   b. 9,5 cm d. 9,6 cm

8.

   Perhatikan gambar di atas.

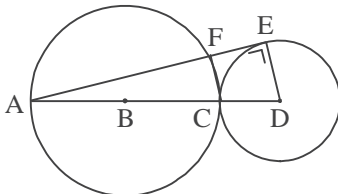
   Panjang tali yang digunakan untuk mengikat dua pipa air berjari-jari 7 cm sebanyak lima kali lilitan adalah ....
   a. 28 cm c. 62 cm
   b. 44 cm d. 72 cm

9. Panjang sisi-sisi sebuah segitiga adalah 8 cm, 15 cm, dan 17 cm. Panjang jari-jari lingkaran dalamnya adalah ....
   a. 3 cm c. 5 cm
   b. 4 cm d. 6 cm

10. Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah 35 cm dan panjang salah satu sisi siku-sikunya adalah 21 cm. Panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah ....
    a. 15,5 cm c. 17,5 cm
    b. 16,5 cm d. 18 cm

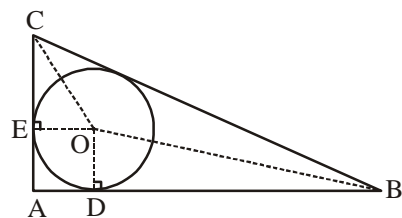
B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

1. Panjang jari-jari dua lingkaran adalah 7 cm dan 3 cm. Jika panjang garis singgung persekutuan luarnya 15 cm maka tentukan
   a. jarak kedua pusat lingkaran;
   b. panjang garis singgung persekutuan dalamnya.

2.

   Pada gambar di atas, kedua lingkaran bersinggungan di luar dengan pusat di titik B dan D. Jika AB = 5 cm dan DE = 3 cm, hitunglah panjang
   a. AE; c. EF.
   b. CF;

3. Diketahui lingkaran L_1 berpusat di O(0, 0), dengan jari-jari r_1 = 3 satuan dan L_2 pusat di P(6, 6), berjari-jari r_2 = 2 satuan.
   a. Gambarlah garis singgung persekutuan dalam L_1 dan L_2.
   b. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran tersebut.

4. Diketahui empat tong minyak berbentuk tabung diikat menjadi satu untuk diisi kembali. Susunlah empat tong tersebut agar panjang tali yang digunakan untuk mengikatnya minimal, kemudian hitung pula panjangnya, jika diameter tong 14 cm.

5.

   Pada gambar di atas Δ ABC siku-siku di A. Panjang AB = 28 cm dan AC = 21 cm. Hitunglah
   a. panjang jari-jari OD;
   b. panjang BD;
   c. panjang OB;
   d. luas Δ COE.

BAB 8 KUBUS DAN BALOK

Sumber: *Dok. Penerbit*

Perhatikan benda-benda di sekitar kita. Dalam kehidupan sehari-hari kita sering memanfaatkan benda-benda seperti gambar di samping, misalnya kipas angin, video cd, dan kardus bekas mainan.

Berbentuk apakah benda-benda tersebut? Dari benda-benda tersebut, manakah yang berbentuk kubus? Mana pula benda yang berbentuk balok? Dapatkah kalian menunjukkan sisi, rusuk, dan titik sudutnya?

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:

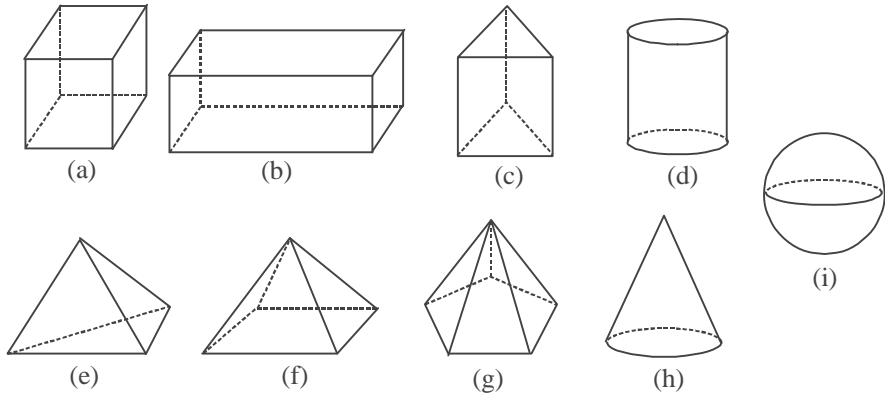
- ❖ dapat menyebutkan unsur-unsur kubus dan balok;
- ❖ dapat membuat jaring-jaring kubus dan balok;
- ❖ dapat menemukan rumus dan menghitung luas permukaan kubus dan balok;
- ❖ dapat menemukan rumus dan menghitung volume kubus dan balok.

Kata-Kata Kunci:

- ❖ unsur-unsur kubus dan balok
- ❖ jaring-jaring kubus dan balok
- ❖ luas permukaan kubus dan balok
- ❖ volume kubus dan balok

Sebelum kamu mempelajari materi pada bab ini, kalian harus menguasai materi tentang bangun persegi dan persegi panjang, serta kedudukan dua garis.

A. MENGENAL BANGUN RUANG

1. Mengenal Berbagai Macam Bangun Ruang

Gambar 8.1

(Berpikir kritis)

Gambarlah sebuah persegi dan persegi panjang.
Sebutkan rusuk-rusuk yang saling sejajar pada bangun tersebut.

Perhatikan bangun-bangun ruang pada Gambar 8.1. Marilah kita ingat kembali macam-macam bangun ruang yang telah kalian kenal. Nama bangun-bangun ruang tersebut sebagai berikut.

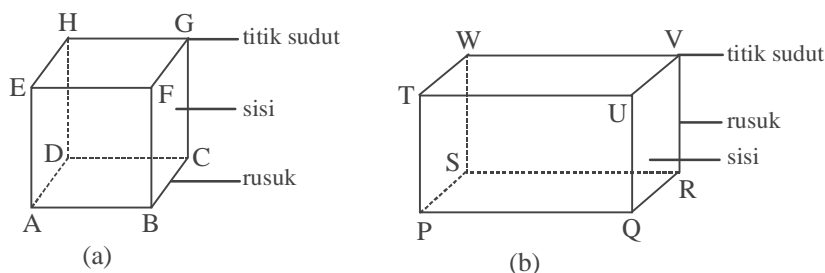
a. Kubus
b. Balok
c. Prisma segitiga
d. Tabung
e. Limas segitiga
f. Limas segi empat
g. Limas segi lima
h. Kerucut
i. Bola

Pada bagian ini, kalian hanya akan membahas mengenai kubus dan balok secara mendalam. Adapun bangun-bangun ruang yang lain, akan kalian pelajari pada bagian selanjutnya.

(Menumbuhkan kreativitas)

Carilah benda-benda di sekitarmu yang berbentuk kubus dan balok. Amatilah permukaan benda-benda tersebut. Ceritakan temuanmu secara singkat di depan kelas.

2. Mengenal Sisi, Rusuk, dan Titik Sudut Kubus maupun Balok

Amatilah bangun-bangun yang berbentuk kubus dan balok. Permukaan kubus semuanya berbentuk persegi yang sama dan sebangun. Coba kalian ingat kembali bangun persegi. Keempat rusuk persegi sama panjang. Jika dikaitkan dengan bangun persegi panjang, persegi merupakan bentuk khusus dari persegi panjang. Karena permukaan kubus berbentuk persegi-persegi yang sama dan sebangun dapat kita katakan bahwa kubus merupakan bentuk khusus dari balok.

Gambar 8.2

Perhatikan Gambar 8.2 (a).

Kubus ABCD.EFGH dibatasi oleh bidang ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, ADHE, dan EFGH. Bidang-bidang tersebut disebut *sisi-sisi kubus* ABCD.EFGH. Selanjutnya, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$ disebut rusuk-rusuk kubus ABCD.EFGH. Coba kalian amati bahwa tiap sisi kubus tersebut dibatasi oleh rusuk-rusuk.

Menurut kalian, apakah rusuk $\overline{AB}$ merupakan perpotongan bidang ABCD dan ABFE?

Rusuk-rusuk $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AD}$ disebut rusuk alas, sedangkan rusuk $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$ disebut rusuk tegak. Dapatkah kalian menyebutkan rusuk mana saja yang termasuk rusuk atas?

Titik-titik A, B, C, D, E, F, G, dan H disebut titik sudut kubus ABCD.EFGH. Menurutmu, apakah titik B merupakan perpotongan antara rusuk $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{BF}$?

Coba kalian bandingkan dengan balok pada Gambar 8.2 (b). Setiap daerah persegi pada kubus dan daerah persegi panjang pada balok disebut bidang atau sisi. Perpotongan dua buah daerah persegi pada kubus atau dua buah daerah persegi panjang pada balok disebut *rusuk*. Adapun titik potong antara tiga buah rusuk disebut *titik sudut*.

Tugas Mandiri

(Berpikir kritis)

Perhatikan balok PQRS.TUVW pada Gambar 8.2 (b). Tuliskan semua sisi, rusuk, dan titik sudutnya.

Diskusi

(Menumbuhkan inovasi)

Diskusikan dengan temanmu.

Amatilah kembali bangun-bangun ruang pada Gambar 8.1. Hitunglah banyak sisi, rusuk, dan titik sudut setiap bangun ruang pada gambar itu. Masukkan hasilnya pada tabel seperti berikut.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2003

Leonhard Euler (1707-1783) adalah seorang matematikawan yang menyatakan bahwa dalam sebarang segi banyak terdapat hubungan antara banyak sisi, banyak rusuk, dan banyak titik sudut. Teorema tersebut dikenal dengan teorema Euler.

No.	Nama Bangun Ruang	Banyak Sisi	Banyak Rusuk	Banyak Titik Sudut
1.	Kubus			
2.	Balok			
3.	Prisma segitiga			
4.	Tabung			
5.	Limas segitiga			
6.	Limas segi empat			
7.	Limas segilima			
8.	Kerucut			
9.	Bola			

Pada bangun ruang di atas, kecuali tabung, kerucut, dan bola, cermatilah adakah hubungan antara banyak sisi, banyak rusuk, dan banyak titik sudutnya?

Apakah kalian menyimpulkan bahwa terdapat hubungan antara banyak sisi, banyak rusuk, dan banyak titik sudut pada bangun ruang di atas seperti berikut ini?

$$S + T = R + 2$$

dengan S = banyak sisi

T = banyak titik sudut

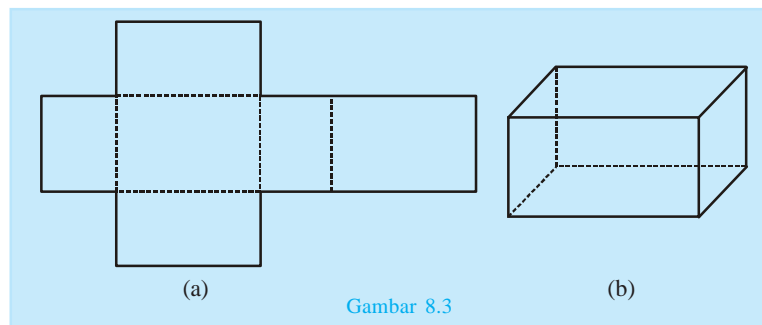
R = banyak rusuk

Rumus di atas dikenal dengan *teorema Euler*.

Coba cek kembali hasil pada tabel di atas dengan rumus tersebut. Apakah rumus tersebut juga berlaku untuk tabung, kerucut, dan bola? Mengapa demikian? Jelaskan jawabanmu.

3. Bangun dari Sisi Kubus dan Balok

Agar kalian paham mengenai bentuk bangun dari tiap sisi balok, lakukan kegiatan berikut.

KEGIATAN

Gambar 8.3

(a) Buatlah bangun seperti pada Gambar 8.3 (a) dengan menggunakan kertas karton tebal.

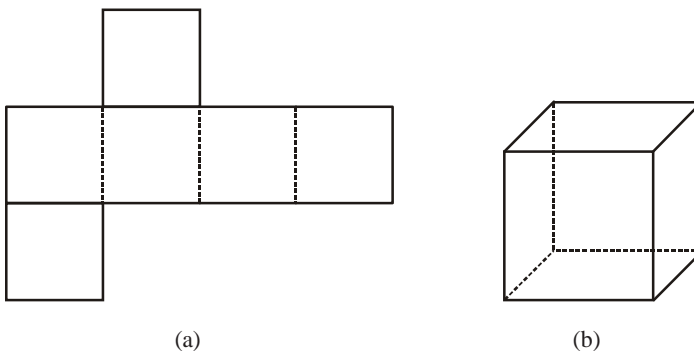
(b) Guntinglah bangun tersebut menurut tepinya.

Dari hasil guntingan tersebut kalian akan memperoleh suatu rangkaian tiga pasang daerah persegi panjang yang setiap pasangnya kongruen.

(c) Lipatlah bangun tersebut pada garis putus-putus, hingga terbentuk kotak seperti Gambar 8.2 (b). Bentuk kotak yang kalian peroleh disebut *balok*.

Perhatikan bahwa tiga pasang daerah persegi panjang pada Gambar 8.3 (a) menjadi tiga pasang sisi balok seperti pada Gambar 8.3 (b). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu balok mempunyai tiga pasang sisi berbentuk daerah persegi panjang yang setiap pasangnya kongruen.

Adapun untuk memahami bentuk bangun dari tiap sisi kubus, lakukan kegiatan seperti bangun balok di atas. Jiplaklah bangun seperti Gambar 8.4 (a) dengan menggunakan kertas karton tebal. Guntinglah menurut tepinya.

(a) (b)

Gambar 8.4

Hasil guntingan tersebut berbentuk rangkaian enam daerah persegi yang saling kongruen.

Dengan melipat bangun tersebut pada garis putus-putus, akan terbentuk bangun ruang seperti Gambar 8.4 (b). Bangun ruang tersebut selanjutnya dinamakan *kubus*.

Perhatikan bahwa enam daerah persegi pada Gambar 8.4 (a) menjadi enam sisi kubus seperti pada Gambar 8.4 (b). Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa sebuah kubus memiliki enam sisi berbentuk persegi yang kongruen.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

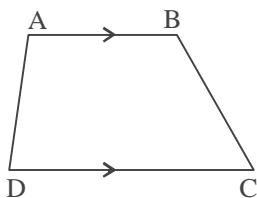
1. Lukislah sebuah kubus dan sebuah balok.

   Dapatkah kalian menentukan sifat-sifat kubus dan balok tersebut dipandang dari sisi, rusuk, dan titik sudutnya?

2. Lukislah kubus KLMN.OPQR.
   a. Berbentuk apakah bangun KLMN? Berapakah luasnya?
   b. Berbentuk apakah bangun LMQP? Berapakah luasnya?
   c. Menurutmu, bagaimana luas setiap sisi pada suatu kubus?

3. Lukislah balok ABCD.EFGH.
   a. Berbentuk apakah bangun ABCD, BCGF, dan ABFE? Tentukan luasnya.
   b. Tentukan pula luas sisi-sisi balok yang lain.
   c. Apa yang dapat kalian simpulkan dari jawaban a dan b?

4. Lukislah sebuah kubus dengan panjang rusuk 4 cm. Berapakah jumlah panjang rusuk kubus tersebut?

5. Sediakan sebuah kaleng bekas roti atau susu. Amatilah kaleng tersebut. Bagaimana sisi kaleng tersebut? Berapakah banyaknya rusuk kaleng tersebut?

4. Rusuk-Rusuk yang Sejajar pada Bangun Ruang

Gambar 8.5

Pada sebuah bidang datar, dua garis dikatakan *sejajar* jika kedua garis tersebut tidak berpotongan. Perhatikan Gambar 8.5.

Pada Gambar 8.5, ruas garis yang sejajar, yaitu $\overline{AB}$ sejajar dengan $\overline{DC}$, ditulis $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$. Adapun $\overline{AD}$ tidak sejajar dengan $\overline{BC}$. Mengapa?

Apakah pengertian garis sejajar pada bidang datar sama dengan garis sejajar pada bangun ruang? Agar kalian dapat menjawabnya, pelajari uraian berikut.

Gambar 8.6

Perhatikan Gambar 8.6. Pada balok ABCD.EFGH tersebut, pasangan ruas garis yang *sejajar* antara lain

a. $\overline{AB}$ dengan $\overline{DC}$;

b. $\overline{AE}$ dengan $\overline{BF}$;

c. $\overline{EH}$ dengan $\overline{FG}$.

Adapun pasangan ruas garis yang tidak sejajar antara lain

a. $\overline{AB}$ dengan $\overline{CG}$;

b. $\overline{AE}$ dengan $\overline{DC}$;

c. $\overline{BC}$ dengan $\overline{DH}$.

Jika kita perhatikan pasangan $\overline{AB}$ dan $\overline{CG}$ maka ruas garis-ruas garis tersebut tidak berpotongan meskipun diperpanjang di kedua ujungnya. Demikian halnya pada pasangan $\overline{AE}$ dan $\overline{DC}$ serta $\overline{BC}$ dan $\overline{DH}$. Meskipun tidak berpotongan, namun garis-garis tersebut termasuk garis-garis tidak sejajar. Berarti ada syarat lain yang harus dipenuhi agar sepasang garis dikatakan sejajar dalam suatu bangun ruang. $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$ serta garis $\overline{AE}$ dan $\overline{BF}$ terletak pada satu bidang, yaitu bidang ABCD dan ABFE. Adapun $\overline{AB}$ dan $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ dan $\overline{DC}$, serta $\overline{BC}$ dan $\overline{DH}$ terletak pada bidang yang berlainan.

(Berpikir kritis)
Perhatikan kembali balok ABCD.EFGH pada Gambar 8.6. Tuliskan semua ruas garis yang sejajar pada balok tersebut. Tuliskan pula semua ruas garis yang tidak sejajar.

Jika dua garis dalam suatu bangun ruang tidak berpotongan terletak pada bidang yang berlainan maka kedua garis tersebut dikatakan *bersilangan.*

Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Dua garis dalam suatu bangun ruang dikatakan sejajar, jika kedua garis itu tidak berpotongan dan terletak pada satu bidang.

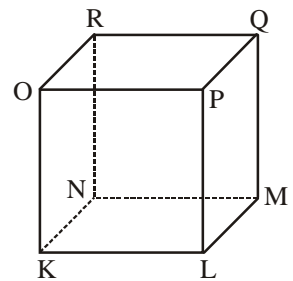
Sekarang, perhatikan kubus KLMN.OPQR pada Gambar 8.7. Ruas garis yang sejajar pada kubus KLMN.OPQR adalah

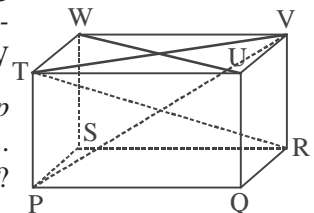
a. $\overline{KL} // \overline{NM} // \overline{OP} // \overline{RQ}$;

b. $\overline{KN} // \overline{LM} // \overline{PQ} // \overline{OR}$;

c. $\overline{KO} // \overline{LP} // \overline{MQ} // \overline{NR}$.

Gambar 8.7

Coba kalian sebutkan ruas garis yang tidak sejajar pada kubus KLMN.OPQR tersebut.

5. Mengenal Diagonal Bidang, Diagonal Ruang, dan Bidang Diagonal

Perhatikan bidang TUVW pada Gambar 8.8. Ruas garis yang menghubungkan titik sudut T dan V serta U dan W disebut *diagonal bidang* atau *diagonal sisi*. Dengan demikian, bidang TUVW mempunyai dua diagonal bidang, yaitu $\overline{TV}$ dan $\overline{UW}$. Jadi, *setiap bidang pada balok mempunyai dua diagonal bidang*. Dapatkah kalian menyebutkan diagonal bidang yang lainnya? Berapa banyaknya diagonal bidang pada balok?

Gambar 8.8

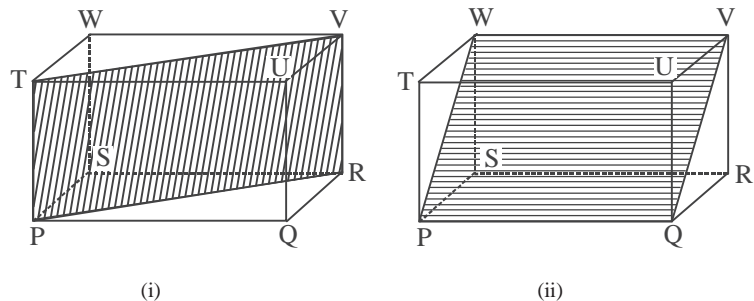
> Diagonal bidang suatu balok adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan pada setiap bidang atau sisi balok.

Perhatikan kembali Gambar 8.8.

Hubungkan titik P dan V, Q dan W, R dan T, atau S dan U. $\overline{PV}$, $\overline{QW}$, $\overline{RT}$, dan $\overline{SU}$ disebut *diagonal ruang*. Diagonal-diagonal ruang tersebut akan berpotongan di satu titik.

Diagonal ruang pada balok adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang.

Suatu balok memiliki empat buah diagonal ruang yang sama panjang dan berpotongan pada satu titik.

Perhatikan balok PQRS.TUVW pada Gambar 8.9. Bidang PRVT (Gambar 8.9(i)) dan PWVQ (Gambar 8.9(ii)) disebut *bidang diagonal*.

Gambar 8.9

Bidang diagonal suatu balok adalah bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang suatu balok. Selain bidang PRVT dan PWVQ, masih ada empat bidang diagonal yang lain. Dapatkah kalian menyebutkan empat bidang diagonal itu?

Suatu balok memiliki enam bidang diagonal yang berbentuk persegi panjang dan tiap pasangnya kongruen.

(Menumbuhkan kreativitas)

Lukislah kubus ABCD.EFGH. Ada berapakah diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonalnya, sebutkan. Berbentuk apakah bidang diagonal pada kubus tersebut?

Berdasarkan uraian di atas, kita akan menyimpulkan mengenai sifat-sifat kubus dan balok sebagai berikut.

Perhatikan Gambar 8.10.

Gambar 8.10

Sifat-sifat kubus ABCD.EFGH sebagai berikut.

a. Memiliki 6 sisi (bidang) berbentuk persegi yang saling kongruen. Sisi (bidang) tersebut adalah bidang ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, ADHE, dan EFGH.

b. Memiliki 12 rusuk yang sama panjang, yaitu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$.

Rusuk-rusuk $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AD}$ disebut rusuk alas, sedangkan rusuk $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, dan $\overline{DH}$ disebut rusuk tegak.

Rusuk-rusuk yang sejajar di antaranya $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ // $\overline{EF}$ // $\overline{HG}$.

Rusuk-rusuk yang saling berpotongan di antaranya $\overline{AB}$ dengan $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ dengan $\overline{CG}$, dan $\overline{EH}$ dengan $\overline{HD}$.

Rusuk-rusuk yang saling bersilangan di antaranya $\overline{AB}$ dengan $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ dengan $\overline{BF}$, dan $\overline{BC}$ dengan $\overline{DH}$.

c. Memiliki 8 titik sudut, yaitu A, B, C, D, E, F, G, dan H.

d. Memiliki 12 diagonal bidang yang sama panjang, di antaranya $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BG}$, dan $\overline{CF}$.

e. Memiliki 4 diagonal ruang yang sama panjang dan berpotongan di satu titik, yaitu $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, dan $\overline{DF}$.

f. Memiliki 6 bidang diagonal berbentuk persegi panjang yang saling kongruen, di antaranya bidang ACGE, BGHA, AFGD, dan BEHC.

Sekarang perhatikan Gambar 8.11.

Sifat-sifat balok PQRS.TUVW sebagai berikut.

Gambar 8.11

a. Memiliki 6 sisi (bidang) berbentuk persegi panjang yang tiap pasangnya kongruen. Sisi (bidang) tersebut adalah bidang PQRS, TUVW, QRVU, PSWT, PQUT, dan SRVW.

b. Memiliki 12 rusuk, dengan kelompok rusuk yang sama panjang sebagai berikut.

(i) Rusuk $\overline{PQ} = \overline{SR} = \overline{TU} = \overline{WV}$.

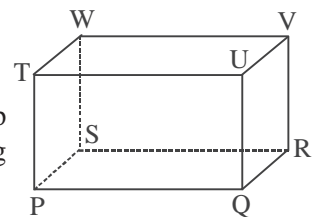
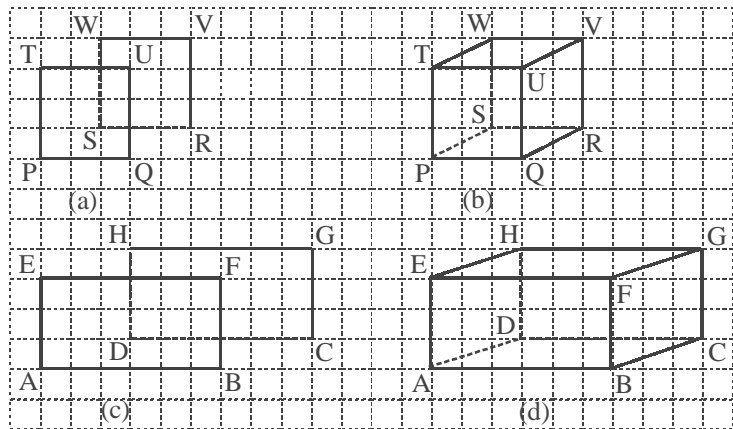
(ii) Rusuk $\overline{QR} = \overline{UV} = \overline{PS} = \overline{TW}$.

(iii) Rusuk $\overline{PT} = \overline{QU} = \overline{RV} = \overline{SW}$.

c. Memiliki 8 titik sudut, yaitu titik P, Q, R, S, T, U, V, dan W.

d. Memiliki 12 diagonal bidang, di antaranya $\overline{PU}$, $\overline{QV}$, $\overline{RW}$, $\overline{SV}$, dan $\overline{TV}$.

e. Memiliki 4 diagonal ruang yang sama panjang dan berpotongan di satu titik, yaitu diagonal $\overline{PV}$, $\overline{QW}$, $\overline{RT}$, dan $\overline{SU}$.

f. Memiliki 6 bidang diagonal yang berbentuk persegi panjang dan tiap pasangnya kongruen. Keenam bidang diagonal tersebut adalah PUVS, QTWR, PWVQ, RUTS, PRVT, dan QSWU.

6. Melukis Kubus dan Balok

Gambar 8.12

(Berpikir kritis)

Selain yang disampaikan pada uraian materi di samping, apakah kalian mempunyai cara lain dalam melukis kubus dan balok? Eksplorasilah hal ini dengan mendiskusikan bersama temanmu. Ceritakan pendapatmu secara singkat di depan kelas.

Gambar 8.12 menunjukkan cara melukis kubus dan balok dilihat dari depan. Bagian yang tidak terlihat ditunjukkan dengan garis putus-putus.

Untuk melukis kubus, perhatikan langkah-langkah berikut.

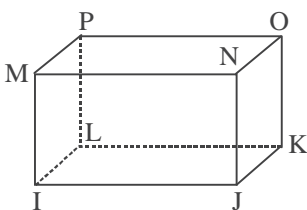
(a) Lukislah sisi kubus bagian depan dan bagian belakang yang berbentuk persegi (persegi PQUT dan SRVW). Rusuk yang tidak terlihat dari depan digambar putus-putus (rusuk $\overline{SR}$ dan $\overline{SW}$).

(b) Hubungkan rusuk-rusuk yang mengarah dari depan ke belakang (rusuk $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, $\overline{UV}$, dan $\overline{TW}$). Kubus PQRS.TUVW terbentuk seperti Gambar 8.12 (b).

Cara melukis balok sama dengan cara melukis kubus, hanya perbedaannya terletak pada bentuk sisinya, yaitu berbentuk persegi panjang. Perhatikan cara melukis balok ABCD.EFGH pada Gambar 8.12 (c) dan (d).

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Perhatikan gambar berikut.

Manakah pernyataan-pernyataan berikut yang benar?

a. Rusuk $\overline{IJ}$ // $\overline{LK}$ // $\overline{MN}$ // $\overline{PO}$.

b. Rusuk $\overline{JN}$ // $\overline{KO}$ // $\overline{IM}$ // $\overline{LP}$.

c. Rusuk $\overline{MN}$ tidak sejajar dengan $\overline{LP}$.

d. Rusuk $\overline{IL}$ // $\overline{JK}$ // $\overline{NO}$ // $\overline{MP}$.

2. Lukislah sebuah kubus KLMN.OPQR pada kertas berpetak dengan panjang rusuk 5 satuan.
   a. Sebutkan pasangan ruas garis yang sejajar.
   b. Sebutkan pula tiga pasang ruas garis yang bersilangan.
3. Lukislah sebuah balok ABCD.EFGH pada kertas berpetak dengan ukuran panjang 5 satuan, lebar 3 satuan, dan tinggi 3 satuan.
   a. Lukislah semua diagonal bidangnya.
   b. Berapa banyak diagonal bidang yang dapat dilukis?
4. Pada bangun balok yang telah kalian lukis (soal nomor 3), lukis diagonal ruangnya. Ada berapa banyak diagonal ruang yang dapat dilukis?
5. a. Lukislah sebuah kubus EFGH.IJKL pada kertas berpetak dengan panjang rusuk 6 satuan dan EFGH sebagai bidang alasnya.
   b. Hitunglah jumlah panjang diagonal bidang pada kubus tersebut.
   c. Hitung pula jumlah panjang diagonal ruang pada kubus tersebut.

B. MODEL KERANGKA SERTA JARING-JARING KUBUS DAN BALOK

1. Model Kerangka Kubus dan Balok

Kalian dapat membuat model kerangka kubus dan balok dari beberapa bahan, misalnya dari lidi dan lilin, atau dari kawat dan patri (solder yang digunakan untuk menyambung dua batang logam).

Gambar 8.11 (a) menunjukkan sebuah kerangka balok yang berukuran panjang = 6 cm, lebar = 3 cm, dan tinggi = 4 cm. Untuk membuat kerangka balok tersebut, gunakan bahan-bahan yang telah disebutkan di atas.

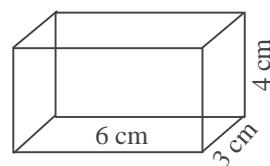
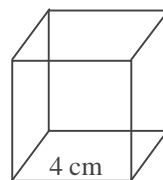
Misalnya, bahan yang digunakan adalah lidi dan lilin, maka untuk membuat model kerangka balok seperti Gambar 8.11 (a) diperlukan

a. 4 batang lidi berukuran 6 cm, yaitu 4×6 cm;
b. 4 batang lidi berukuran 4 cm, yaitu 4×4 cm;
c. 4 batang lidi berukuran 3 cm, yaitu 4×3 cm.

Jadi, jumlah panjang lidi yang diperlukan

$= (4 \times 6)$ cm $+ (4 \times 4)$ cm $+ (4 \times 3)$ cm

$= 24$ cm $+ 16$ cm $+ 12$ cm

$= 52$ cm

(a)

(b)

Gambar 8.11

Jika sebuah balok berukuran panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t maka jumlah panjang rusuknya $= 4p + 4l + 4t$
$= 4(p + l + t)$

Untuk membuat model kerangka kubus, kita harus memerhatikan bahwa panjang setiap rusuk kubus adalah sama, dan banyaknya rusuk 12 buah. Oleh karena itu, untuk membuat model kerangka kubus seperti pada Gambar 8.11 (b), jumlah panjang lidi yang diperlukan $= (12 \times 4)$ cm

$= 48$ cm

Jika panjang rusuk sebuah kubus adalah s maka jumlah panjang rusuknya $= 12s$.

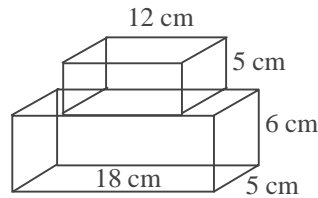
1. Panjang rusuk setiap kubus adalah 12 cm. Tentukan jumlah panjang rusuk kubus tersebut.

Penyelesaian:
Panjang setiap rusuk kubus $= s = 12$ cm.
Jumlah panjang rusuk kubus $= 12s$
$= (12 \times 12)$ cm
$= 144$ cm

2. Sebuah balok mempunyai panjang 14 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 6 cm. Hitunglah jumlah panjang rusuk balok tersebut.

Penyelesaian:
Panjang (p) = 14 cm, lebar (l) = 8 cm, dan tinggi (t) = 6 cm.
Jumlah panjang rusuk balok $= 4(p + l + t)$
$= 4(14 + 8 + 6)$ cm
$= 4 \times 28$ cm
$= 112$ cm

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Sukma memiliki kawat sepanjang 156 cm. Ia ingin menggunakan kawat tersebut untuk membuat kerangka kubus. Berapa panjang rusuk kubus agar kawat tidak bersisa?
2. Diketahui sebatang kawat mempunyai panjang 236 cm. Kawat itu akan dibuat model kerangka berbentuk kubus dan balok. Jika ukuran balok tersebut $(12 \times 8 \times 5)$ cm, tentukan panjang rusuk kubus.
3. Perhatikan gambar di bawah.

Berapa panjang kawat yang diperlukan untuk membuat model kerangka seperti gambar di atas?

4. Hitunglah panjang kawat yang diperlukan untuk membuat kotak kapur tulis berukuran $(6 \times 4 \times 5)$ cm.

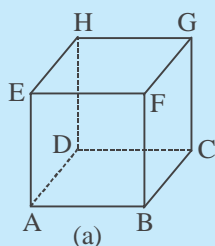
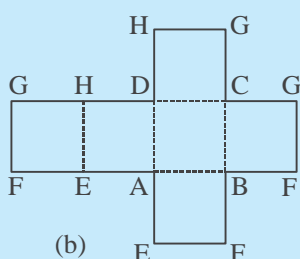
5. Made akan membuat 15 buah kerangka balok yang masing-masing berukuran 30 cm × 20 cm × 15 cm. Bahan yang akan digunakan terbuat dari kawat yang harganya Rp1.500/m.

   a. Hitunglah jumlah panjang kawat yang diperlukan untuk membuat balok tersebut.
   b. Hitunglah biaya yang diperlukan untuk membeli bahan/kawat.

2. Jaring-Jaring Kubus dan Balok

Agar kalian memahami mengenai jaring-jaring kubus dan balok, lakukan kegiatan berikut.

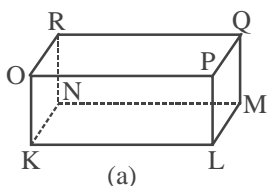
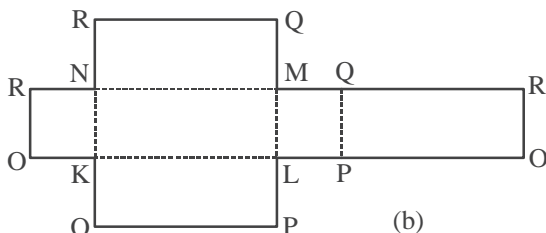
KEGIATAN

a. Buatlah model kubus dari karton dengan panjang rusuk 5 cm dan beri nama seperti pada Gambar 8.12 (a).

Gambar 8.12

b. Guntinglah sepanjang rusuk $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{HG}$, $\overline{CG}$, $\overline{FB}$, $\overline{EA}$, dan $\overline{HD}$.

c. Buka/bentangkan kubus tersebut menurut rusuk-rusuk yang telah digunting tadi, sehingga diperoleh bangun seperti Gambar 8.12 (b).

Jika kalian telah melakukan kegiatan di atas, bangun yang kalian peroleh disebut *jaring-jaring kubus*.

Jaring-jaring kubus adalah sebuah bangun datar yang jika dilipat menurut ruas-ruas garis pada dua persegi yang berdekatan akan membentuk bangun kubus.

Lakukan kegiatan yang sama seperti di atas untuk memperoleh jaring-jaring balok seperti pada Gambar 8.13 (b).

(Menumbuhkan kreativitas)

Ada 11 bentuk jaring-jaring kubus yang berlainan. Buatlah model kubus dengan panjang rusuk 5 cm. Coba kalian temukan 11 jaring-jaring dari kubus yang telah kalian buat.

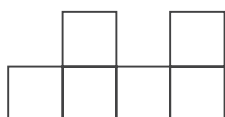
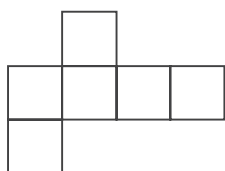
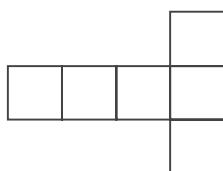
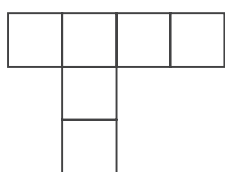
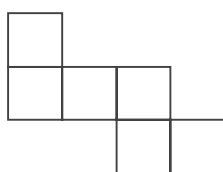
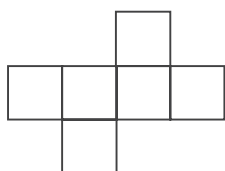
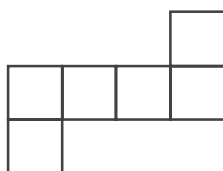
Gambar 8.13

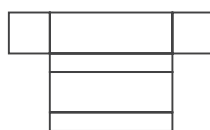
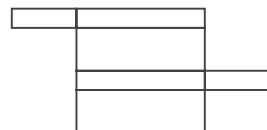
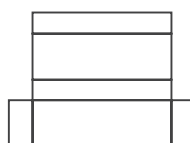
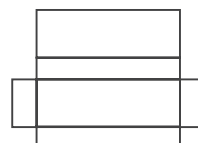
Jaring-jaring balok adalah sebuah bangun datar yang jika dilipat menurut ruas-ruas garis pada dua persegi panjang yang berdekatan akan membentuk bangun balok.

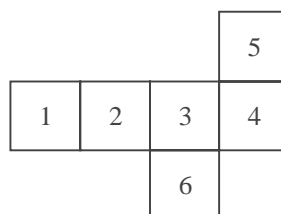
Sebuah kubus atau balok memiliki lebih dari satu jaring-jaring yang berbeda. Dapatkah kalian membuat kemungkinan lain jaring-jaring dari kubus dan balok? Ujilah jawabanmu dengan melipat kembali jaring-jaring tersebut.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Di antara gambar berikut, manakah yang merupakan jaring-jaring kubus?

(a)

(b) (c)

(d) (e)

(f) (g)

2. Di antara gambar berikut, manakah yang merupakan jaring-jaring balok?

(a)

(b)

(c)

(d)

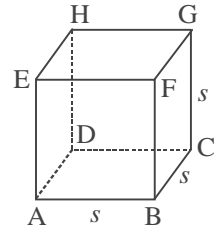
3. Perhatikan jaring-jaring kubus pada gambar di bawah.

Jika nomor 3 sebagai alas kubus, nomor berapakah yang menjadi tutup kubus?

4. Buatlah model balok dengan panjang 6 cm, lebar 4 cm, dan tinggi 5 cm. Carilah kemungkinan-kemungkinan jaring-jaring balok yang berlainan yang dapat dibuat dari balok tersebut. Ada berapakah jaring-jaring balok yang dapat kalian buat?

C. LUAS PERMUKAAN SERTA VOLUME KUBUS DAN BALOK

Pada bagian ini kalian akan mempelajari mengenai luas permukaan dan volume kubus serta balok. Untuk menentukannya, coba kalian ingat kembali bahwa sebuah kubus mempunyai 6 sisi yang berbentuk persegi. Adapun sebuah balok mempunyai 6 bidang atau sisi yang berbentuk persegi panjang.

1. Luas Permukaan Kubus dan Balok

Luas permukaan kubus dan balok adalah jumlah seluruh sisi kubus atau balok. Gambar 8.14 menunjukkan sebuah kubus yang panjang setiap rusuknya adalah s. Coba kalian ingat kembali bahwa sebuah kubus memiliki 6 buah sisi yang setiap rusuknya sama panjang. Pada Gambar 8.14, keenam sisi tersebut adalah sisi ABCD, ABFE, BCGF, EFGH, CDHG, dan ADHE. Karena panjang setiap rusuk kubus s, maka luas setiap sisi kubus = s^2. Dengan demikian, luas permukaan kubus = $6s^2$.

Gambar 8.14

$L = 6s^2$, dengan L = luas permukaan kubus
s = panjang rusuk kubus

Untuk menentukan luas permukaan balok, perhatikan Gambar 8.15. Balok pada Gambar 8.15 mempunyai tiga pasang sisi yang tiap pasangnya sama dan sebangun, yaitu

(a) sisi ABCD sama dan sebangun dengan sisi EFGH;
(b) sisi ADHE sama dan sebangun dengan sisi BCGF;
(c) sisi ABFE sama dan sebangun dengan sisi DCGH.

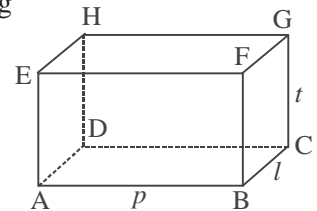
Gambar 8.15

Akibatnya diperoleh

luas permukaan ABCD = luas permukaan EFGH = $p \times l$
luas permukaan ADHE = luas permukaan BCGF = $l \times t$
luas permukaan ABFE = luas permukaan DCGH = $p \times t$

Dengan demikian, luas permukaan balok sama dengan jumlah ketiga pasang sisi yang saling kongruen pada balok tersebut. Luas permukaan balok dirumuskan sebagai berikut.

$$L = 2(p \times l) + 2(l \times t) + 2(p \times t)$$
$$= 2\{(p \times l) + (l \times t) + (p \times t)\}$$

dengan L = luas permukaan balok
p = panjang balok
l = lebar balok
t = tinggi balok

1. Sebuah kubus panjang setiap rusuknya 8 cm. Tentukan luas permukaan kubus tersebut.

Penyelesaian:

Luas permukaan kubus $= 6s^2$
$= 6 \times 8^2$
$= 384 \text{ cm}^2$

2. Sebuah balok berukuran $(6 \times 5 \times 4)$ cm. Tentukan luas permukaan balok.

Penyelesaian:

Balok berukuran $(6 \times 5 \times 4)$ cm artinya panjang = 6 cm, lebar = 5 cm, dan tinggi 4 cm.

Luas permukaan balok

$= 2\{(p \times l) + (l \times t) + (p \times t)\}$
$= 2\{(6 \times 5) + (5 \times 4) + (6 \times 4)\}$
$= 2(30 + 20 + 24)$
$= 148 \text{ cm}^2$

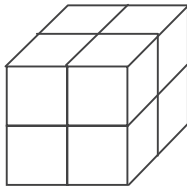
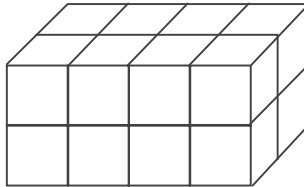
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Hitunglah luas permukaan kubus dengan panjang setiap rusuknya sebagai berikut.
   a. 4 cm
   b. 7 cm
   c. 10 cm
   d. 12 cm
2. Sebuah benda berbentuk kubus luas permukaannya 1.176 cm^2. Berapa panjang rusuk kubus itu?
3. Dua buah kubus masing-masing panjang rusuknya 6 cm dan 10 cm. Hitunglah perbandingan luas permukaan dua kubus tersebut.
4. Hitunglah luas permukaan balok dengan ukuran sebagai berikut.
   a. 8 cm $\times$ 4 cm $\times$ 2 cm
   b. 8 cm $\times$ 3 cm $\times$ 4 cm
   c. 9 cm $\times$ 9 cm $\times$ 6 cm
   d. 9 cm $\times$ 8 cm $\times$ 4 cm
5. Suatu balok memiliki luas permukaan 198 cm^2. Jika lebar dan tinggi balok masing-masing 6 cm dan 3 cm, tentukan panjang balok tersebut.
6. Hitunglah perbandingan luas permukaan dua buah balok yang berukuran $(6 \times 5 \times 4)$ cm dan $(8 \times 7 \times 4)$ cm.

2. Volume Kubus dan Balok

Untuk menentukan volume sebuah kubus perhatikan Gambar 8.16 (a). Gambar tersebut menunjukkan sebuah kubus satuan dengan panjang rusuk 2 satuan panjang.

(a)

(b)

Gambar 8.16

Volume kubus tersebut = panjang kubus satuan × lebar kubus satuan × tinggi kubus satuan
= (2 × 2 × 2) satuan volume
= 2^3 satuan volume
= 8 satuan volume

Jadi, diperoleh rumus volume kubus (V) dengan panjang rusuk *s* sebagai berikut.

$$V = \text{rusuk} \times \text{rusuk} \times \text{rusuk} = s \times s \times s = s^3$$

Tugas Mandiri

(Menumbuhkan kreativitas)

Amatilah benda-benda di lingkungan sekitarmu. Sediakan benda-benda yang berbentuk kubus dan balok, masing-masing 3 buah. Ukurlah panjang sisinya. Kemudian, hitunglah luas permukaan dan volumenya. Tuliskan hasilnya dalam bentuk laporan dan serahkan kepada gurumu.

Selanjutnya perhatikan Gambar 8 16 (b).

Gambar 8.16 (b) menunjukkan sebuah balok satuan dengan ukuran panjang = 4 satuan panjang, lebar = 2 satuan panjang, dan tinggi = 2 satuan panjang.

Volume balok = panjang kubus satuan × lebar kubus satuan × tinggi kubus satuan
= (4 × 2 × 2) satuan volume
= 16 satuan volume

Jadi, volume balok (V) dengan ukuran ($p \times l \times t$) dirumuskan sebagai berikut.

$$V = \text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi} = p \times l \times t$$

1. Sebuah kubus memiliki panjang rusuk 5 cm. Tentukan volume kubus itu.

Penyelesaian:

Panjang rusuk kubus = 5 cm.

Volume kubus $= s \times s \times s$
$= 5 \times 5 \times 5$
$= 125$

Jadi, volume kubus itu adalah 125 cm^3.

2. Volume sebuah balok 120 cm^3. Jika panjang balok 6 cm dan lebar balok 5 cm, tentukan tinggi balok tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan panjang balok = p = 6 cm, lebar balok = l = 5 cm, dan tinggi balok = t.

$$\begin{aligned} \text{Volume balok} &= p \times l \times t \\ 120 &= 6 \times 5 \times t \\ 120 &= 30 \times t \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Jadi, tinggi balok tersebut adalah 4 cm.

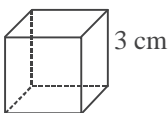
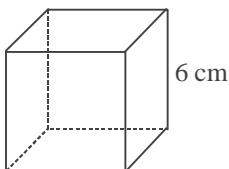
Uji Kompetensi 6

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Panjang semua rusuk kubus 240 dm. Hitunglah volume kubus tersebut (dalam cm).
2. Diketahui luas permukaan sebuah kotak berbentuk kubus 96 cm^2. Hitunglah volume kotak tersebut.
3. Sebuah mainan berbentuk balok volumenya 140 cm^3. Jika panjang mainan 7 cm dan tinggi mainan 5 cm, tentukan lebar mainan tersebut.
4. Perbandingan panjang, lebar, dan tinggi sebuah balok adalah 5 : 4 : 3. Jika volume balok 1.620 cm^3, tentukan ukuran balok tersebut.
5. Sebuah kubus panjang rusuknya 5 cm, sedangkan sebuah balok berukuran $(7 \times 5 \times 4)$ cm.
   a. Tentukan volume kubus dan balok tersebut.
   b Tentukan perbandingan volume keduanya.

3. Menentukan Luas Permukaan dan Volume Kubus serta Balok jika Ukuran Rusuknya Berubah

Kalian telah mempelajari cara menentukan luas permukaan maupun volume kubus dan balok. Bagaimana jika panjang rusuk-rusuk kubus dan balok tersebut berubah? Apakah luas permukaan dan volumenya ikut berubah? Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Dengan memerhatikan Gambar 8.17, kalian akan memperoleh sebagai berikut.

(a) Luas permukaan kubus (a) adalah

$L = 6s^2 = 6 \times 3^2 = 6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2$.

Volume kubus (a) adalah $V = s^3 = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$.

(b) Luas permukaan kubus (b) adalah

$L = 6s^2 = 6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216 \text{ cm}^2$.

Volume kubus (b) adalah $V = s^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

(c) Luas permukaan kubus (c)

$L = 6s^2 = 6 \times 9^2 = 6 \times 81 = 486$ cm^2.

Volume kubus (c) adalah $V = s^3 = 9^3 = 729$ cm^3.

Gambar 8.17

Sekarang kalian perhatikan panjang rusuk kubus pada Gambar 8.17 (a), (b), dan (c). Kalian akan memperoleh

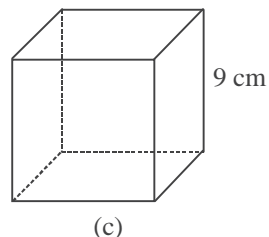
(a) panjang rusuk kubus (b) = 2 × panjang rusuk kubus (a), sehingga

luas permukaan kubus (b) = 6 × (panjang rusuk kubus (b))^2
= 6 × (2 × panjang rusuk kubus (a))^2
$= 6 \times (2 \times 3)^2$
$= 6 \times 2^2 \times 3^2$
$= 2^2 \times 6 \times 3^2$
$= 2^2 \times 54$
= 216 cm^2

dan volume kubus (b) = (panjang rusuk kubus (b))^3
= (2 × panjang rusuk kubus (a))^3
$= (2 \times 3)^3$
$= 2^3 \times 3^3$
$= 2^3 \times 27$
= 216 cm^3

(b) panjang rusuk kubus (c) = 3 × panjang rusuk kubus (a), sehingga

luas permukaan kubus (c) = 6 × (panjang rusuk kubus (c))^2
= 6 × (3 × panjang rusuk kubus (a))^2
$= 6 \times (3 \times 3)^2$
$= 6 \times 3^2 \times 3^2$
$= 3^2 \times 6 \times 3^2$
$= 3^2 \times 54$
= 486 cm^2

dan volume kubus (c) = (panjang rusuk kubus (c))^3
= (3 × panjang rusuk kubus (a))^3
$= (3 \times 3)^3$
$= 3^3 \times 3^3$
$= 3^3 \times 27$
= 729 cm^3

Diketahui panjang sebuah balok sama dengan dua kali lebarnya dan tinggi balok setengah kali lebarnya. Ukuran balok tersebut diubah sehingga panjangnya menjadi tiga kali semula dan lebarnya menjadi dua kali semula, sedangkan tingginya tetap. Jika luas seluruh permukaan balok semula 448 cm^2, tentukan volume balok setelah diperbesar.

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika panjang rusuk suatu kubus = s, luas permukaan = L, dan volume = V, kemudian panjang rusuk kubus itu diperbesar atau diperkecil k kali maka

(a) $L_{baru} = 6(ks \times ks)$
$= 6k^2s^2$
$= k^2 \times 6s^2$
$= k^2L$

dengan L_{baru} = luas permukaan kubus setelah diperbesar atau diperkecil
L = luas permukaan kubus semula

(b) $V_{baru} = ks \times ks \times ks$
$= k^3s^3$
$= k^3V$

dengan V_{baru} = volume kubus setelah diperbesar atau diperkecil
V = volume kubus semula

Dengan cara yang sama, kalian dapat menemukan luas permukaan dan volume balok jika ukuran panjang, lebar, atau tingginya diubah.

Suatu balok memiliki panjang = p, lebar = l, tinggi = t, luas permukaan = L, dan volume = V. Balok itu kemudian diubah ukurannya menjadi panjang = ap, lebar = bl, dan tinggi = ct dengan a, b, c konstanta positif. Kalian akan memperoleh

(a) $L_{baru} = 2\left((ap \times bl) + (bl \times ct) + (ap \times ct)\right)$
$= 2\left(ab(p \times l) + bc(l \times t) + ac(p \times t)\right)$

(b) $V_{baru} = ap \times bl \times ct$
$= abc(p \times l \times t)$
$= abcV$

Bagaimana jika $a = b = c$? Eksplorasilah hal tersebut. Apakah kalian akan memperoleh kesimpulan seperti berikut ini?

$$L_{baru} = \left((ap \times bl) + (bl \times ct) + (ap \times ct)\right)$$
$$= 2\left(ab(p \times l) + bc(l \times t) + ac(p \times t)\right)$$
$$= 2\left(a^2\left((p \times l) + (l \times t) + (p \times t)\right)\right)$$
$$= a^2 \times \left((p \times l)\right) + (l \times t) + (p \times l)$$
$$= a^2L$$

$$V_{baru} = ap \times bl \times ct$$
$$= abc(p \times l \times t)$$
$$= a^3 V$$

dengan L_{baru} = luas permukaan balok setelah diubah ukurannya
V_{baru} = volume balok setelah diubah ukurannya
L = luas permukaan balok semula
V = volume balok semula

Sebuah kubus panjang rusuknya 8 cm, kemudian rusuk tersebut diperkecil sebesar $\frac{1}{2}$ kali panjang rusuk semula. Berapa volume kubus setelah diperkecil?

Penyelesaian:

$V = s^3 = 8^3 = 512$ cm^3

$k = \frac{1}{2}$

$V_{baru} = k^3 \times V$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 512$ cm^3

$= \frac{1}{8} \times 512$ cm^2 $= 64$ cm^2

Jadi, volume kubus setelah rusuknya diperkecil $\frac{1}{2}$ kali semula adalah 64 cm^3.

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Volume sebuah kubus sama dengan volume balok yaitu 1.000 cm^3. Diketahui panjang balok dua kali panjang kubus dan tinggi balok setengah kali lebar balok. Tentukan luas seluruh permukaan balok.
2. Intan ingin membuat akuarium berbentuk balok dengan volume 9 dm^3. Ia menginginkan lebar akuarium tersebut 15 cm dengan panjang dua kali lebarnya dan kedalaman lima lebihnya dari ukuran lebar.
   a. Tentukan ukuran akuarium tersebut.
   b. Tentukan luas seluruh permukaan akuarium.
3. Bonar akan membuat 10 tempat kapur tulis berbentuk kubus dengan volume 1.331 cm^3.
   a. Tentukan panjang rusuk tempat kapur tulis tersebut.
   b. Tentukan volume totalnya.
4. Sebuah kubus memiliki volume 343 cm^3. Jika panjang rusuk kubus tersebut diperbesar menjadi 4 kali panjang rusuk semula, tentukan volume kubus yang baru.

5. Suatu balok memiliki panjang 5 cm, lebar 4 cm, dan volume 60 cm^3. Ukuran balok tersebut diperbesar sehingga panjangnya tiga kali panjang semula, lebarnya dua kali lebar semula, dan tingginya tetap.
   a. Tentukan panjang, lebar, dan tinggi balok.
   b. Tentukan luas seluruh permukaan balok.
   c. Tentukan volume balok setelah diperbesar.

Catatan:

* Dalam menentukan rusuk, luas permukaan, maupun volume kubus dan balok, pastikan bahwa satuan ukuran-ukurannya telah sama.
* Perhatikan perbedaan pernyataan berikut.
  – Panjang *a* dua lebihnya dari panjang *b*, artinya adalah $a = 2 + b$.
  – Panjang *a* dua kali dari panjang *b*, artinya adalah $a = 2b$.

Rangkuman

1. Kubus dan balok, masing-masing memiliki 6 sisi, 12 rusuk, dan 8 titik sudut.
2. Suatu kubus memiliki 6 sisi berbentuk persegi yang kongruen.
3. Suatu balok mempunyai 3 pasang sisi berbentuk persegi panjang yang setiap pasangnya kongruen.
4. Dua garis dalam suatu bangun ruang dikatakan sejajar, jika kedua garis itu tidak berpotongan dan terletak pada satu bidang.
5. Diagonal bidang suatu kubus atau balok adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan pada setiap bidang kubus atau balok.
6. Diagonal ruang suatu kubus atau balok adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang.
7. Bidang diagonal suatu kubus atau balok adalah bidang yang dibatasi dua rusuk dan dua diagonal bidang suatu kubus atau balok.
8. Jika panjang rusuk suatu kubus *a* maka jumlah panjang rusuknya = $12a$.
9. Jika sebuah balok berukuran panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t maka jumlah panjang rusuknya = $4(p + l + t)$.
10. Luas permukaan kubus = $6s^2$.
    Volume kubus = s^3.
11. Luas permukaan balok = $2\{(p\times l)+(l\times t)+(p\times t)\}$.
    Volume balok = $p\times l\times t$.

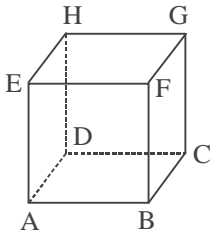
Refleksi

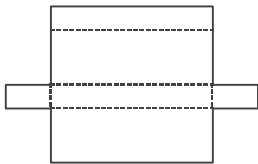
Setelah mempelajari bab ini, coba rangkum kembali materi *Kubus dan Balok* dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada gurumu. Catat pula manfaat apa saja yang dapat kalian peroleh dari materi ini. Buatlah dalam sebuah laporan dan serahkan kepada gurumu.

Evaluasi 8

Kerjakan di buku tugasmu.

A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1.

   Pernyataan di bawah ini benar, *kecuali* ....
   a. $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$ // $\overline{EF}$ // $\overline{HG}$
   b. $\overline{AE}$ // $\overline{BF}$ // $\overline{CG}$ // $\overline{DH}$
   c. $\overline{AD}$ // $\overline{EH}$ // $\overline{BC}$ // $\overline{FG}$
   d. $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ // $\overline{BF}$ // $\overline{CG}$

2.

   Jika rangkaian persegi panjang di atas dilihat sepanjang garis putus-putus, akan terbentuk bangun ....
   a. kubus　　c. prisma
   b. limas　　d. balok

3. Sebuah balok mempunyai luas permukaan 376 cm². Jika panjang balok 10 cm, lebar balok 6 cm, tinggi balok adalah ....
   a. 6 cm　　c. 8 cm
   b. 7 cm　　d. 9 cm

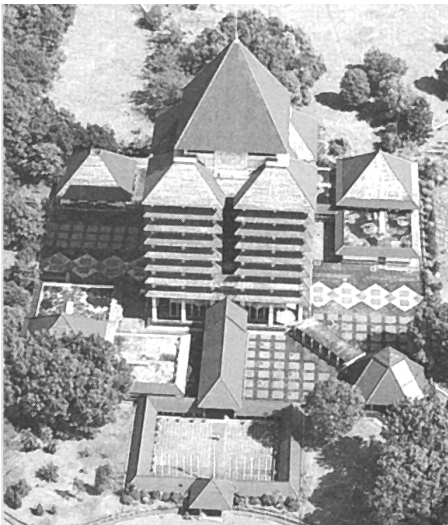
4. Sebuah kubus panjang rusuknya 6 cm. Luas permukaan kubus itu adalah ....
   a. 36 cm^2　　c. 432 cm^2
   b. 216 cm^2　　d. 1.296 cm^2

5. Pernyataan di bawah ini yang benar adalah ....
   a. Dua garis dalam ruang dikatakan bersilangan jika kedua garis itu tidak berpotongan dan terletak pada satu bidang.
   b. Sebuah balok memiliki enam diagonal ruang.
   c. Sebuah balok memiliki enam bidang diagonal yang berbentuk persegi panjang dan sepasang-sepasang kongruen.
   d. Diagonal bidang balok adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang saling berhadapan dalam ruang pada kotak.

6. Selisih panjang rusuk dua buah kubus adalah 3 dm. Jika selisih luas sisi kubus itu 234 dm^2, selisih volume kedua kubus adalah ....
   a. 358 dm^3 c. 387 dm^3
   b. 378 dm^3 d. 387,5 dm^3
7. Rusuk-rusuk balok yang bertemu pada sebuah pojok balok berbanding 4 : 4 : 1. Jika volume balok 432 liter, luas permukaan balok adalah ....
   a. 423 dm^2 c. 452 dm^2
   b. 432 dm^2 d. 464 dm^2
8. Selisih panjang rusuk dua buah kubus adalah $\frac{1}{2}$ m dan selisih volumenya $\frac{7}{8}$ m^3. Jika kubus besar disusun menjadi kubus-kubus kecil yang kongruen dengan panjang rusuk 10 cm, banyaknya kubus-kubus kecil itu adalah ....
   a. 10 buah c. 500 buah
   b. 100 buah d. 1.000 buah
9. Diketahui balok ABCD.EFGH dengan AB = $(x + 1)$ cm, BC = x cm, dan AC = $(x + 2)$ cm. Jika tinggi balok 2 cm, volume balok adalah ....
   a. 9 cm^3 c. 42 cm^3
   b. 24 cm^3 d. 48 cm^3
10. Sebuah kubus memiliki rusuk sepanjang 6 cm. Rusuk itu diperpanjang sebesar k kali panjang rusuk semula, sehingga volumenya menjadi 1.728 cm^3. Nilai k adalah ....
    a. 2 c. 6
    b. 4 d. 8

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

1. Pada kertas berpetak, lukislah balok PQRS.TUVW dengan panjang 4 satuan, lebar 2 satuan, dan tinggi 3 satuan.
   a. Lukislah semua diagonal ruangnya.
   b. Ada berapa banyak diagonal bidangnya, sebutkan.
2. Hitunglah luas permukaan balok jika diketahui
   a. V = 24 cm^3, p = 4 cm, dan l = 3 cm;
   b. V = 315 cm^3, p = 9 cm, dan l = 7 cm.
3. Sebuah kubus panjang setiap rusuknya 2 m. Kubus tersebut tersusun dari kubus-kubus kecil dengan panjang setiap rusuknya 20 cm.
   a. Tentukan volume kubus besar dan kubus kecil.
   b. Berapa banyak kubus kecil hingga tersusun kubus besar?
4. Luas permukaan sebuah kubus adalah 294 cm^2. Hitunglah
   a. panjang diagonal bidangnya;
   b. panjang diagonal ruangnya;
   c. volume kubus.
5. Diketahui tempat air berukuran panjang 60 cm, lebar 50 cm, dan tinggi 100 cm berisi air penuh. Air tersebut akan dikurangi dengan cara melubangi tempat tersebut, hingga air yang keluar ditampung dalam tempat lain yang berukuran $(40 \times 30 \times 20)$ cm.
   a. Tentukan volume penampungan air.
   b. Tentukan tinggi permukaan air pada tempat pertama setelah dikurangi.

BANGUN RUANG SISI DATAR LIMAS DAN PRISMA TEGAK

Sumber: *Indonesian Heritage*, 2002

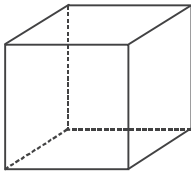
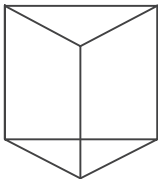
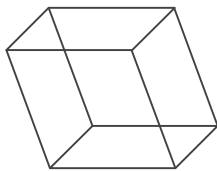
Perhatikan atap dari sebuah rumah. Bagaimanakah bentuk atap rumah?

Gambar di samping menunjukkan bangunan Gedung Rektorat Universitas Indonesia. Perhatikan bentuk atap dari tiap bangunan di gedung tersebut. Manakah yang berbentuk limas? Mana pulakah atap yang berbentuk prisma? Bagaimana bentuk bidang atau sisi dari tiap atap bangunan tersebut? Agar kalian dapat memahaminya, pelajari uraian materi berikut.

Tujuan pembelajaranmu pada bab ini adalah:
- ❖ dapat menyebutkan unsur-unsur prisma dan limas;
- ❖ dapat membuat jaring-jaring prisma tegak dan limas;
- ❖ dapat menemukan rumus dan menghitung luas permukaan prisma dan limas;
- ❖ dapat menemukan rumus dan menghitung volume prisma dan limas.

Kata-Kata Kunci:
- ❖ unsur-unsur prisma dan limas
- ❖ jaring-jaring prisma dan limas
- ❖ luas permukaan prisma dan limas
- ❖ volume prisma dan limas

(Menumbuhkan inovasi)

Sediakan kardus bekas yang berbentuk balok. Amatilah kardus tersebut. Ceritakan mengenai sifat balok. Potonglah kardus tersebut, menurut salah satu bidang diagonalnya. Bangun apakah yang terbentuk? Ceritakan pengalamanmu secara singkat di depan kelas.

(a)

(b)

(c)

Gambar 9.1

Pada bab sebelumnya, kalian telah mempelajari bangun ruang kubus dan balok. Kalian juga telah diperkenalkan dengan bangun ruang, seperti prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola. Sekarang kalian akan mempelajari secara lebih mendalam mengenai bangun ruang limas dan prisma tegak.

Agar kalian dapat memahami materi ini dengan baik, coba kalian ingat kembali mengenai segitiga, segi empat, teorema Pythagoras, serta kubus dan balok.

A. BANGUN RUANG PRISMA DAN LIMAS

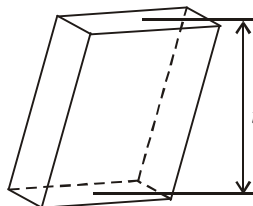
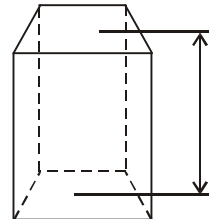
1. Prisma

Perhatikan Gambar 9.1. Gambar tersebut menunjukkan beberapa contoh bangun ruang prisma. Bangun-bangun ruang tersebut mempunyai bidang alas dan bidang atas yang sejajar dan kongruen. Sisi lainnya berupa sisi tegak berbentuk jajargenjang atau persegi panjang yang tegak lurus ataupun tidak tegak lurus terhadap bidang alas dan bidang atasnya. Bangun seperti itu dinamakan *prisma*.

Berdasarkan rusuk tegaknya, prisma dibedakan menjadi dua, yaitu prisma tegak dan prisma miring. *Prisma tegak* adalah prisma yang rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus pada bidang atas dan bidang alas. *Prisma miring* adalah prisma yang rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus pada bidang atas dan bidang alas. Gambar 9.1 (c) adalah salah satu contoh prisma miring. Prisma miring disebut juga *prisma condong*.

Berdasarkan bentuk alasnya, terdapat prisma segitiga, prisma segi empat, prisma segi lima, dan seterusnya. Jika alasnya berupa segi n beraturan maka disebut prisma segi n beraturan.

Gambar 9.1 (a) disebut prisma tegak segi empat, Gambar 9.1 (b) disebut prisma tegak segitiga, dan Gambar 9.1 (c) disebut prisma miring segi empat beraturan.

Setiap bangun ruang pasti memiliki tinggi atau kedalaman. Apakah yang dimaksud tinggi prisma? Tinggi prisma adalah jarak antara bidang alas dan bidang atas. Tinggi prisma ditunjukkan pada Gambar 9.2.

Gambar 9.2

Selanjutnya perhatikan Gambar 9.3. Gambar tersebut menunjukkan prisma tegak segitiga ABC.DEF.

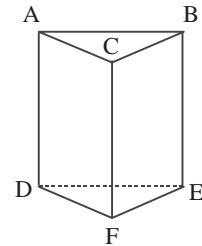
Gambar 9.3

a. Titik A, B, C, D, E, dan F adalah titik sudut prisma.

b. Δ ABC adalah bidang atas prisma.

c. Δ DEF adalah bidang alas prisma.

d. Bidang ACFD, BCFE, dan ABED adalah sisi tegak prisma.

e. $\overline{AD}$, $\overline{CF}$, dan $\overline{BE}$ adalah rusuk-rusuk tegak prisma.

Bidang atas dan bidang alas prisma masing-masing tersusun atas tiga buah rusuk.

Dapatkah kalian menyebutkan rusuk-rusuk tersebut?

Karena prisma ABC.DEF merupakan prisma tegak maka tinggi prisma = panjang $\overline{AD}$ = panjang $\overline{CF}$ = panjang $\overline{BE}$.

Kubus dan balok dapat dipandang sebagai prisma tegak, yaitu prisma tegak segi empat. Setiap sisi kubus atau balok dapat dianggap sebagai bidang alas atau bidang atas, dan rusuk yang tegak lurus terhadap bidang alas dan bidang atas sebagai rusuk tegaknya.

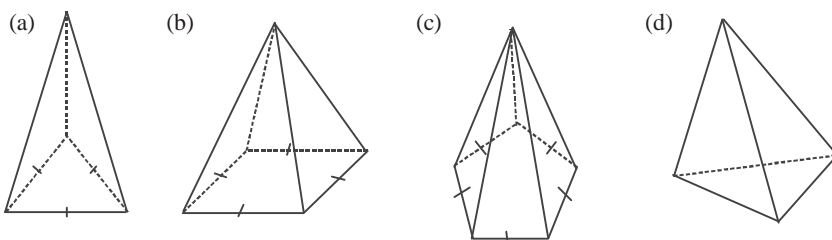
(Berpikir kritis)

Diskusikan dengan teman sebangkumu. Mengapa tabung dapat dipandang sebagai prisma dengan bidang alas berbentuk lingkaran? Berbentuk apakah bidang sisi tegaknya? Tunjukkan dengan menggunakan prisma segi banyak beraturan.

2. Limas

Gambar 9.4 adalah contoh bangun ruang limas. Limas adalah bangun ruang yang alasnya berbentuk segi banyak (segitiga, segi empat, atau segi lima) dan bidang sisi tegaknya berbentuk segitiga yang berpotongan pada satu titik. Titik potong dari sisi-sisi tegak limas disebut titik puncak limas.

Seperti halnya prisma, pada limas juga diberi nama berdasarkan bentuk bidang alasnya. Jika alasnya berbentuk segitiga maka limas tersebut dinamakan limas segitiga. Jika alas suatu limas berbentuk segi lima beraturan maka limas tersebut dinamakan limas segi lima beraturan.

Setelah mempelajari uraian di atas, dapatkah kalian menyebutkan nama-nama limas pada Gambar 9.4?

(a)
(b)
(c)
(d)
Gambar 9.4

Berdasarkan bentuk alas dan sisi-sisi tegaknya limas dapat dibedakan menjadi limas segi *n* beraturan dan limas segi *n* sebarang. Perhatikan Gambar 9.5 berikut ini.

(a)

Limas segitiga beraturan

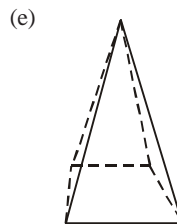
(b)

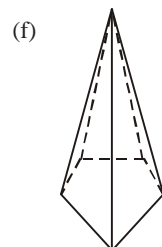
Limas segi empat beraturan

(c)

Limas segi lima beraturan

Limas segitiga sebarang

(e)

Limas segi empat sebarang

(f)

Limas segi lima sebarang

Gambar 9.5

(Berpikir kritis)
Dari Gambar 9.5 di samping, tentukan puncak dan tinggi dari masing-masing limas. Buatlah kesimpulan mengenai tinggi limas.

Sebuah limas pasti mempunyai puncak dan tinggi.

Jika kalian mengerjakan tugas di samping dengan benar maka kalian akan memperoleh kesimpulan sebagai berikut.

a. Tinggi limas adalah jarak terpendek dari puncak limas ke sisi alas.
b. Tinggi limas tegak lurus dengan titik potong sumbu simetri bidang alas.

Perhatikan Gambar 9.6. Gambar tersebut adalah limas segi empat T.ABCD dengan bidang alas ABCD. Dari gambar tersebut, kita dapat memperoleh hal-hal berikut.

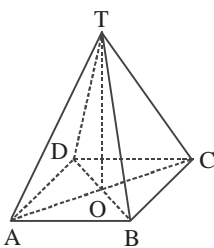
Gambar 9.6

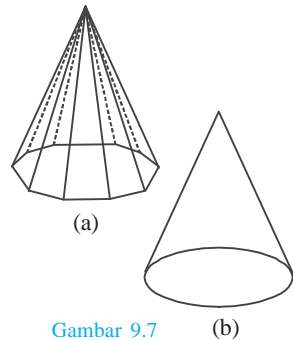
a. Titik A, B, C, dan D adalah titik sudut bidang alas limas dan titik T adalah titik puncak limas.

b. $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$, dan $\overline{TD}$ disebut rusuk tegak limas. Jika limas beraturan maka $\overline{TA} = \overline{TB} = \overline{TC} = \overline{TD}$.

c. Δ TAB, Δ TBC, Δ TCD, dan Δ TAD adalah sisi tegak limas. Jika limas beraturan maka masing-masing sisi tegak berbentuk segitiga sama kaki yang sama dan sebangun.

d. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AD}$ adalah rusuk bidang alas limas. (Jika limas beraturan maka $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$).

e. $\overline{TO}$ adalah tinggi limas.

Selanjutnya perhatikan Gambar 9.7.

Gambar 9.7 (a) menunjukkan bangun limas segi banyak beraturan. Jika rusuk-rusuk pada bidang alasnya diperbanyak secara terus-menerus maka akan diperoleh bentuk yang mendekati kerucut (Gambar 9.7 (b)). Oleh karena itu, kerucut dapat dipandang sebagai limas. Kerucut memiliki bidang alas berupa daerah lingkaran dan bidang sisi tegaknya berupa bidang lengkung yang disebut selimut kerucut.

Gambar 9.7 (b)

(Menumbuhkan kreativitas)

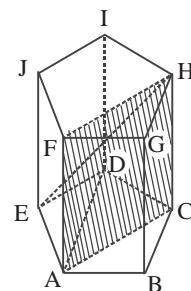
Amati lingkungan di sekitarmu.

Carilah benda-benda yang berbentuk prisma dan limas. Ceritakan hasil temuanmu di depan kelas.

B. DIAGONAL BIDANG, DIAGONAL RUANG, SERTA BIDANG DIAGONAL PRISMA DAN LIMAS

1. Diagonal Bidang, Diagonal Ruang, dan Bidang Diagonal pada Prisma

Pada bab sebelumnya, kalian telah mempelajari diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal bangun ruang kubus dan balok. Pada bagian ini kalian akan mempelajari diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal pada bangun ruang prisma dan limas. Untuk menentukan diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal prisma dan limas, pada prinsipnya sama seperti saat kalian mempelajarinya pada bangun ruang kubus dan balok.

Perhatikan Gambar 9.8. Gambar tersebut menunjukkan bangun prisma segi lima beraturan. Prisma segi lima beraturan memiliki bidang alas, bidang atas, dan bidang sisi tegak. Diagonal bidang alas prisma segi lima ABCDE.FGHIJ, pada gambar di samping antara lain $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, dan $\overline{BD}$. Bidang diagonalnya, antara lain ACHF, ADIF, dan ECHJ. Ruas garis AH, AI, dan EH adalah contoh diagonal ruang prisma tersebut. Dapatkah kalian menyebutkan diagonal bidang, bidang diagonal, dan diagonal ruang lainnya? Diskusikan hal ini dengan teman sebangkumu.

Gambar 9.8

Setelah memahami uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

a. Diagonal bidang alas adalah garis yang menghubungkan dua titik sudut yang tidak bersebelahan pada bidang alas.

b. Bidang diagonal adalah bidang yang memuat diagonal bidang alas dan diagonal bidang atas serta keduanya sejajar.

c. Diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan titik sudut pada alas dengan titik sudut pada bidang atas yang tidak terletak pada sisi tegak yang sama.

Untuk mengetahui banyak diagonal bidang alas, diagonal ruang, dan bidang diagonal prisma segi n, salin dan lengkapilah tabel berikut. Lalu buatlah kesimpulannya.

Prisma Segi n	Diagonal Bidang	Bidang Diagonal	Diagonal Ruang
$n = 3$	...	...	...
$n = 4$	...	...	...
$n = 5$	...	...	...
⋮			
$n = p$	...	...	...

(Berpikir kritis)
Bentuklah kelompok yang terdiri atas 4 orang, 2 pria dan 2 wanita. Diskusikan hal berikut.
Apakah setiap limas tegak beraturan segi n, untuk $n \geq 4$ pasti memiliki diagonal bidang alas, diagonal ruang, dan bidang diagonal?

Setelah melengkapi tabel di atas, apakah kalian mendapatkan rumus sebagai berikut?

Banyak diagonal bidang alas prisma segi $n = \frac{n(n-3)}{2}$;

banyak bidang diagonal prisma segi n $= \frac{n(n-3)}{2}$;

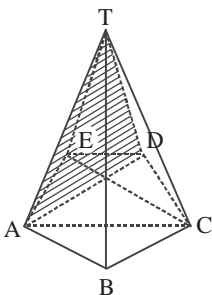
banyak diagonal ruang prisma segi n $= n(n - 3)$;

dengan n = banyaknya sisi suatu segi banyak.

2. Diagonal Bidang Alas, Diagonal Ruang, dan Bidang Diagonal pada Limas

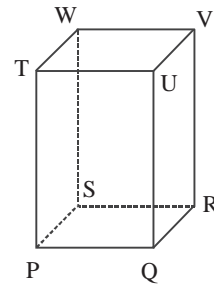
Kalian telah memahami diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal pada prisma. Sekarang kalian akan mempelajari tiga unsur tersebut pada limas. Perhatikan Gambar 9.9.

Gambar 9.9

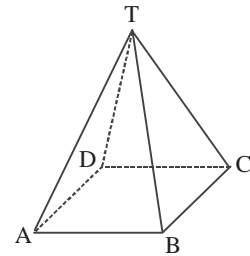
Gambar 9.9 menunjukkan limas T.ABCDE dengan alas berbentuk segi lima beraturan. Diagonal bidang alasnya adalah $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CE}$, sedangkan bidang diagonalnya adalah TAC, TAD, TBD, TBE, dan TCE. Apakah pada bangun tersebut terdapat diagonal ruang? Mengapa demikian?

3. Banyak Sisi, Rusuk, dan Titik Sudut Prisma Tegak dan Limas Beraturan

a. *Prisma Tegak Beraturan*

Perhatikan Gambar 9.10.

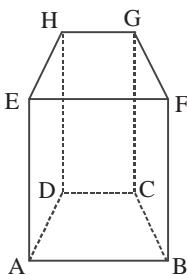
Gambar 9.10 menunjukkan bangun prisma tegak segi empat PQRS.TUVW. Prisma PQRS.TUVW mempunyai dua sisi (alas dan atas) yang sejajar dan kongruen, yaitu PQRS dan TUVW. Selain itu, prisma PQRS.TUVW memiliki empat sisi tegak yang kongruen, yaitu PQUT, SRVW, QRVU, dan PSWT. Rusuk-rusuk sisi alasnya adalah $\overline{PQ}$, $\overline{SR}$, $\overline{PS}$, dan $\overline{QR}$. Coba kalian sebutkan rusuk-rusuk sisi atasnya. Rusuk-rusuk tegak pada prisma tersebut adalah $\overline{PT}$, $\overline{QU}$, $\overline{RV}$, dan $\overline{SW}$. Titik-titik sudut prisma tersebut ada 8, yaitu P, Q, R, S, T, U, V, dan W.

Gambar 9.10

b. *Limas Beraturan*

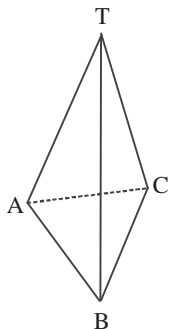
Perhatikan Gambar 9.11. Gambar 9.11 menunjukkan bangun limas segi empat beraturan T.ABCD. Limas tersebut memiliki empat rusuk tegak, yaitu $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$, dan $\overline{TD}$ yang sama panjang. Rusuk-rusuk alasnya adalah $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AD}$. Rusuk-rusuk alas tersebut sama panjang, karena alasnya berbentuk segi empat beraturan. Bidang ABCD adalah alas limas T.ABCD. Limas T.ABCD memiliki empat sisi tegak yang sama dan sebangun, yaitu TAB, TBC, TAD, dan TCD. Titik-titik sudut limas T.ABCD ada lima, coba kalian sebutkan. Apakah titik T merupakan titik puncak limas T.ABCD?

Gambar 9.11

Secara umum dapat dirumuskan bahwa banyak sisi pada limas segi *n* adalah (*n* + 1) buah, sedangkan pada prisma segi *n* adalah (*n* + 2) buah, dengan *n* = banyak sisi suatu segi banyak.

Uji Kompetensi 1

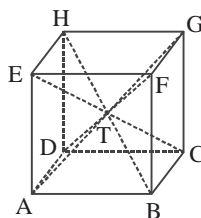
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Gambar di samping menunjukkan prisma segi empat ABCD. EFGH.

   a. Tentukan bidang alas dan bidang atasnya. Apakah kedua bidang itu kongruen? Buktikan.
   b. Tentukan rusuk-rusuk tegaknya. Apakah semua rusuk tegaknya sama panjang?
   c. Ada berapa titik sudutnya? Sebutkan.
   d. Tentukan tinggi prisma.

2.

Gambar di samping menunjukkan limas segitiga beraturan T.ABC.

a. Tentukan titik-titik sudut bidang alas dan titik puncak limas.
b. Sebutkan bidang atau sisi tegak limas tersebut. Berbentuk apakah masing-masing bidang itu? Apakah semua sisi tegaknya kongruen?
c. Sebutkan rusuk-rusuk alas limas.
d. Adakah diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonalnya?

3. Tentukan banyaknya diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal pada bangun ruang berikut.
a. Prisma segi lima.
b. Prisma segi delapan.
c. Prisma segi sepuluh.
d. Limas segi lima beraturan.
e. Limas segi enam beraturan.

4.

Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH di samping. Melalui titik-titik sudutnya ditarik garis diagonal ruang, sehingga terbentuk limas.

a. Berapa limas yang terbentuk dalam kubus tersebut? Sebutkan.
b. Apakah limas-limas itu kongruen?
c. Berbentuk apakah alas setiap limas itu?
d. Jika panjang rusuk kubus 8 cm, tentukan tinggi limas.

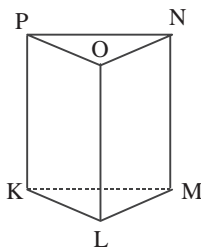
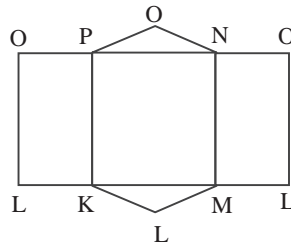
5. Lukis limas segi lima beraturan T.ABCDE. Dari gambar yang telah kalian lukis, sebutkan
a. rusuk-rusuk yang sama panjang;
b. sisi-sisi yang sama dan sebangun;
c. jumlah diagonal sisi alasnya;
d. jumlah bidang diagonalnya.

C. JARING-JARING PRISMA DAN LIMAS

1. Jaring-Jaring Prisma

Buatlah bangun prisma seperti pada Gambar 9.12 dari kertas karton. Guntinglah sepanjang rusuk-rusuk $\overline{LO}$, $\overline{OP}$, $\overline{ON}$, $\overline{KL}$, dan $\overline{LM}$. Jika cara mengguntingmu tepat, kalian akan mendapatkan bentuk seperti Gambar 9.13. Bentuk seperti itu disebut jaring-jaring prisma.

(Menumbuhkan kreativitas)

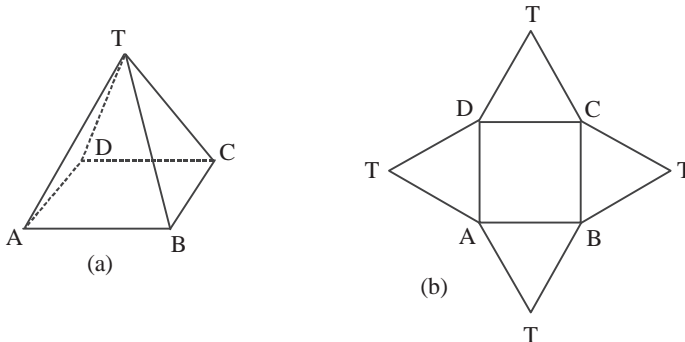
Gambarlah jaring-jaring prisma dan limas yang lain, selain yang telah kalian pelajari.

Gambar 9.12

Gambar 9.13

2. Jaring-Jaring Limas

Seperti halnya pada prisma, kalian juga dapat membuat jaring-jaring limas. Buat bangun limas seperti Gambar 9.14 (a) dari kertas karton. Guntinglah sepanjang rusuk $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$, dan $\overline{TD}$. Kalian akan memperoleh bentuk seperti Gambar 9.14 (b). Bentuk itulah yang disebut jaring-jaring limas.

Jadi, jaring-jaring prisma atau limas akan kalian dapatkan jika kalian membuka atau membentangkan prisma atau limas tersebut.

Gambar 9.14

Tugas Mandiri

(Menumbuhkan kreativitas)

Gambarlah prisma tegak segi enam ABCDEF.GHIJKL. Gambar pula jaring-jaring prisma tersebut.

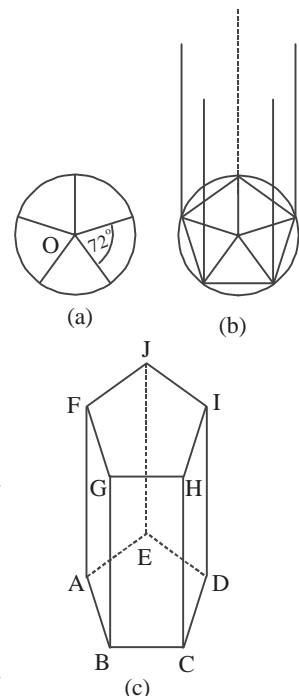
3. Melukis Prisma Tegak dan Limas Beraturan

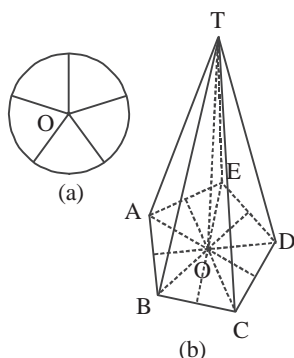
Untuk melukis prisma tegak, perhatikan langkah-langkah berikut.

(a) Lukis bidang alas prisma terlebih dahulu.
Jika bidang alasnya berbentuk segi *n* beraturan maka perhatikan besar setiap sudut pusatnya. Selanjutnya, lukislah segi *n* beraturan dengan langkah-langkah sebagai berikut.
   (i) Lukis suatu lingkaran yang berpusat di titik O dan jari-jari *r*.
   (ii) Bagi sudut pusat menjadi *n* bagian yang sama besar.
   (iii) Lukis jari-jari lingkaran yang membatasi sudut pusat.
   (iv) Hubungkan tali-tali busurnya, sehingga menghasilkan segi *n* beraturan yang diminta.

(b) Lukis rusuk tegak prisma, tegak lurus bidang alas dan sama panjang.

(c) Hubungkan rusuk atasnya, sehingga membentuk bidang atas prisma, yang sejajar dan kongruen dengan bidang alas.

Cara melukis limas beraturan sama dengan cara melukis prisma tegak beraturan, hanya perbedaannya terletak pada rusuk tegaknya. Untuk melukis rusuk tegak limas, lukis terlebih dahulu tinggi limas yang tegak lurus bidang alas dan berujung pada titik puncak limas. Kemudian lukis rusuk tegaknya dengan menghubungkan titik sudut bidang alas dengan titik puncak limas.

Prisma tegak segi lima

Gambar 9.15

Limas segi lima beraturan
Gambar 9.16

Gambar 9.15 dan 9.16 menunjukkan langkah-langkah melukis prisma tegak segi lima dan limas segi lima beraturan.

Besar satu sudut pusat segi lima beraturan = $\frac{360^\circ}{5}$ = 72°.

Besar sudut segi banyak beraturan sebagai berikut.

Besar satu sudut segi banyak beraturan adalah $\frac{(n-1)\times 180^\circ}{n}$

Besar satu sudut pusat segi banyak beraturan adalah $\frac{1}{n}\times 360^\circ$, dengan n = banyak segi.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Buatlah prisma segitiga KLM.NOP dari kertas karton. Jika kalian gunting sepanjang rusuk $\overline{KN}$, $\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{OP}$, dan $\overline{NO}$ maka akan kalian dapatkan sebuah jaring-jaring prisma. Gambarlah jaring-jaring prisma tersebut.
2. Gambarlah limas segi enam beraturan beserta jaring-jaringnya.
3. Gambarlah prisma tegak ABCD.EFGH dengan alas berbentuk jajargenjang, panjang AB = 6 cm, AD = 3 cm, besar $\angle A = 30^\circ$, dan tinggi = 4 cm. Kemudian gambarlah jaring-jaring prisma tersebut.
4. Gambarlah prisma segi enam beraturan beserta jaring-jaringnya.
5. Kerucut dapat dipandang sebagai limas segi banyak beraturan. Dapatkah kalian menentukan bidang diagonal, diagonal ruang, dan jaring-jaringnya?

D. LUAS PERMUKAAN PRISMA DAN LIMAS

Luas permukaan bangun ruang adalah jumlah luas seluruh permukaan bangun ruang tersebut. Untuk menentukan luas permukaan bangun ruang, perhatikan bentuk dan banyak sisi bangun ruang tersebut.

Pada bab sebelumnya, kalian telah mempelajari cara menentukan luas permukaan kubus dan balok. Pada bagian ini kita akan membahas bagaimana cara menemukan rumus dan menghitung luas permukaan bangun ruang prisma dan limas.

1. Luas Permukaan Prisma

(a)

(b)

Gambar 9.17

Gambar 9.17 (a) menunjukkan prisma tegak segitiga ABC.DEF, sedangkan Gambar 9.17 (b) menunjukkan jaring-jaring prisma tersebut. Kalian dapat menemukan rumus luas permukaan prisma dari jaring-jaring prisma tersebut.

Luas permukaan prisma

= luas Δ DEF + luas Δ ABC + luas BADE + luas ACFD + luas CBEF

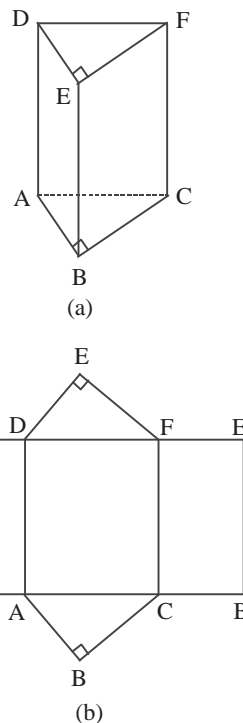
= (2 × luas Δ ABC) + (AB × BE) + (AC × AD) + (CB × CF)

= (2 × luas Δ ABC) + [(AB + AC + CB) × AD]

= (2 × luas alas) + (keliling Δ ABC × tinggi)

= (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi)

Dengan demikian, secara umum rumus luas permukaan prisma sebagai berikut.

> Luas permukaan prisma = (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi)

Suatu prisma alasnya berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi 6 cm, 8 cm, dan 10 cm, serta tinggi prisma 12 cm. Tanpa menggambar terlebih dahulu, tentukan luas permukaan prisma.

Penyelesaian:

Luas permukaan prisma

= (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi)

$$= 2\times\left(\frac{1}{2}\times6\times8\right)+\left[(6+8+10)\times12\right]$$

= 48 + 288 = 336 cm^2.

Uji Kompetensi 3

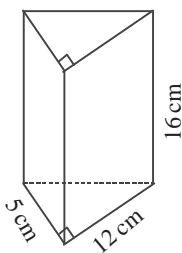
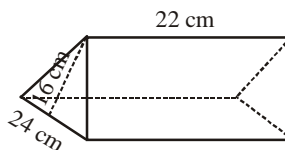
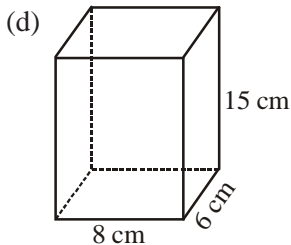
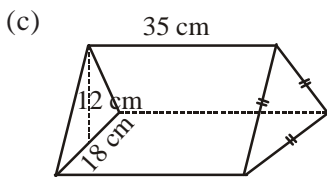
Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Hitunglah luas permukaan dari masing-masing prisma berikut.

(a)

(b)

(c)

(d)

2. Sebuah prisma alasnya berbentuk segitiga siku-siku dengan sisi miring 26 cm dan salah satu sisi siku-sikunya 10 cm. Jika luas permukaan prisma 960 cm^2, tentukan tinggi prisma.
3. Alas sebuah prisma berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonal masing-masing 12 cm dan 16 cm. Jika tinggi prisma 18 cm, hitunglah
   a. panjang sisi belah ketupat;
   b. luas alas prisma;
   c. luas permukaan prisma.
4. Sebuah prisma alasnya berbentuk persegi panjang dengan luas alas 24 cm^2. Jika lebar persegi panjang 4 cm dan tinggi prisma 10 cm, hitunglah luas permukaan prisma.
5. Sebuah prisma memiliki alas berbentuk trapesium sama kaki dengan panjang sisi-sisi sejajarnya 8 cm dan 14 cm serta panjang kaki trapesium 10 cm. Jika tinggi prisma 4 cm, hitunglah luas permukaan prisma.

2. Luas Permukaan Limas

(a)

(b)

Gambar 9.18

Perhatikan Gambar 9.18. Gambar 9.18 (a) menunjukkan limas segi empat T.ABCD dengan alas berbentuk persegi panjang. Adapun Gambar 9.18 (b) menunjukkan jaring-jaring limas segi empat tersebut.

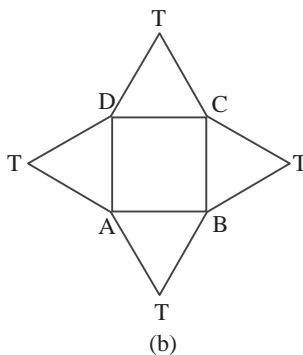
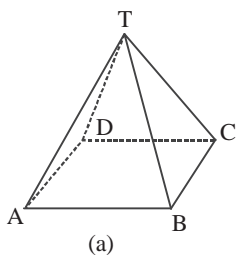
Seperti menentukan luas permukaan prisma, kalian dapat menentukan luas permukaan limas dengan mencari luas jaring-jaring limas tersebut.

Luas permukaan limas

= luas persegi ABCD + luas Δ TAB + luas Δ TBC + luas Δ TCD + luas Δ TAD

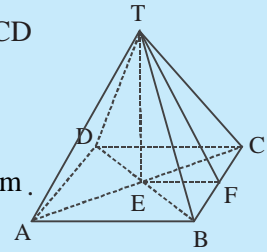
= luas alas + jumlah luas seluruh sisi tegak

Jadi, secara umum rumus luas permukaan limas sebagai berikut.

> Luas permukaan limas = luas alas + jumlah luas seluruh sisi tegak

Diketahui alas sebuah limas T.ABCD berbentuk persegi dengan panjang rusuk 10 cm dan tinggi limas 12 cm. Hitunglah luas permukaan limas.

Penyelesaian:

Luas alas limas = luas persegi ABCD
= 10×10
= 100 cm^2

Panjang EF = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm.

Gambar 9.19

Perhatikan bahwa Δ TEF siku-siku. Karena Δ TEF siku-siku maka berlaku teorema Pythagoras, sehingga

$TF^2 = TE^2 + EF^2$
$= 12^2 + 5^2$
$= 144 + 25$
$= 169$

TF = $\sqrt{169}$ = 13 cm

Luas Δ TAB = luas Δ TBC = luas Δ TCD = luas Δ TAD

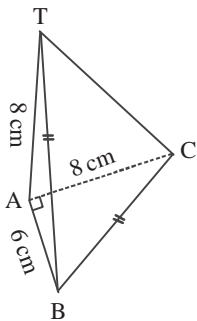
Luas Δ TBC = $\frac{1}{2} \times BC \times TF$
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ cm}^2$

Luas permukaan limas
= luas persegi ABCD + (4 $\times$ luas Δ TAB)
= $100 + (4 \times 65) \text{ cm}^2$
= 360 cm^2

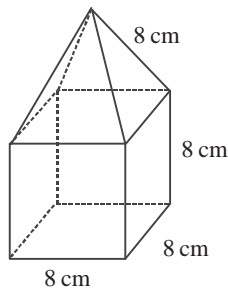
Uji Kompetensi 4

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

1. Alas sebuah limas berbentuk persegi dengan panjang sisinya 12 cm. Jika tinggi segitiga pada sisi tegak 10 cm, hitunglah
   a. tinggi limas;
   b. luas permukaan limas.
2. Suatu limas segi empat beraturan sisi tegaknya terdiri atas empat segitiga sama kaki yang kongruen. Diketahui luas salah satu segitiga itu 135 cm^2 dan tinggi segitiga dari puncak limas 15 cm. Hitunglah luas permukaan limas.

3.

Suatu limas T.ABC, alas dan salah satu sisi tegaknya berbentuk segitiga siku-siku seperti gambar di samping. Tentukan luas permukaan limas tersebut.

4. Alas sebuah limas segi empat beraturan berbentuk persegi. Jika tinggi segitiga 17 cm dan tinggi limas 15 cm, tentukan luas permukaan limas.

5.

Sebuah bangun terdiri atas prisma dan limas seperti pada gambar di atas. Jika semua rusuk bangun tersebut masing-masing panjangnya 8 cm, hitunglah luas permukaan bangun tersebut.

E. VOLUME PRISMA DAN LIMAS

(Menumbuhkan kreativitas)

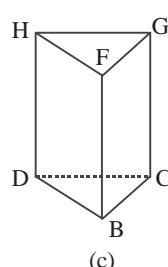
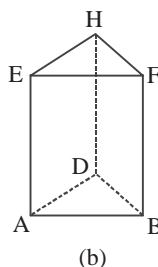
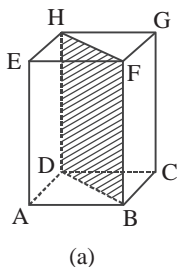
Amatilah benda-benda di lingkungan sekitarmu. Sediakan benda-benda yang berbentuk prisma dan limas, masing-masing 3 buah. Ukurlah panjang sisi dan tinggi tiap benda tersebut. Kemudian, hitunglah luas permukaan dan volumenya. Tulislah hasilnya dalam bentuk laporan dan kumpulkan kepada gurumu.

Pada bagian depan telah kalian pelajari mengenai luas permukaan prisma dan limas. Selanjutnya, kalian akan mempelajari tentang volume bangun ruang prisma dan limas.

1. Volume Prisma

(a)

(b)

(c)

Gambar 9.20

Perhatikan Gambar 9.20 (a). Gambar tersebut menunjukkan sebuah balok ABCD.EFGH. Kalian telah mengetahui bahwa balok merupakan salah satu contoh prisma tegak. Kalian dapat menemukan rumus volume prisma dengan cara membagi balok ABCD. EFGH tersebut menjadi dua prisma yang ukurannya sama. Jika balok ABCD.EFGH dipotong menurut bidang BDHF maka akan diperoleh dua prisma segitiga yang kongruen seperti Gambar 9.20 (b) dan 9.20 (c).

Volume prisma ABD.EFH

$$= \frac{1}{2} \times \text{ volume balok ABCD.EFGH}$$

$$= \frac{1}{2} \times (AB \times BC \times FB)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{luas } ABCD \times FB$$

$$= \text{luas } \Delta\, ABD \times \text{tinggi}$$

$$= \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Sekarang perhatikan Gambar 9.21. Gambar tersebut menunjukkan prisma segi enam beraturan ABCDEF.GHIJKL. Prisma tersebut dibagi menjadi 6 buah prisma yang sama dan sebangun. Perhatikan prisma segitiga BCN.HIM. Prisma segi enam beraturan ABCDEF.GHIJKL terdiri atas 6 buah prisma BCN.HIM yang kongruen.

Dengan demikian volume prisma segi enam ABCDEF.GHIJKL

$= 6 \times$ volume prisma segitiga BCN.HIM

$= 6 \times$ luas Δ BCN $\times$ CI

$= 6 \times$ luas alas $\times$ tinggi

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap prisma berlaku rumus berikut.

Volume prisma = luas alas × tinggi

(Menumbuhkan kreativitas)

Lihatlah prisma tegak segi enam ABCDEF.GHIJKL pada Gambar 9.21. Gambarlah jaring-jaring prisma tersebut.

Gambar 9.21

2. Volume Limas

Untuk menemukan volume limas, perhatikan Gambar 9.22 (a). Gambar 9.22 (a) menunjukkan kubus yang panjang rusuknya $2a$. Keempat diagonal ruangnya berpotongan di satu titik, yaitu titik T, sehingga terbentuk enam buah limas yang kongruen seperti Gambar 9.22 (b). Jika volume limas masing-masing adalah V maka diperoleh hubungan berikut.

$$\text{Volume limas} = \frac{1}{6} \times \text{volume kubus}$$

$$= \frac{1}{6} \times 2a \times 2a \times 2a$$

$$= \frac{1}{6} \times (2a)^2 \times 2a$$

$$= \frac{1}{3} \times (2a)^2 \times a = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Jadi, dapat disimpulkan untuk setiap limas berlaku rumus berikut.

$$\text{Volume limas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

(a)

(b)

Gambar 9.22

Sebuah prisma alasnya berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 14 cm dan lebar 8 cm. Jika tinggi prisma 16 cm, hitunglah volume prisma.

Penyelesaian:

Luas alas = luas persegi panjang

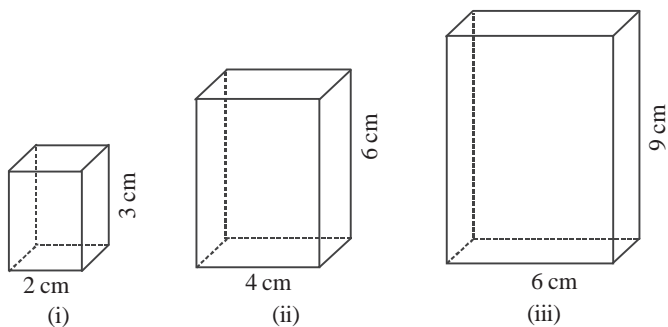
$= 14 \times 8 \times 1 \text{ cm}^2 = 112 \text{ cm}^2$

Volume prisma = luas alas $\times$ tinggi

$= 112 \text{ cm}^2 \times 16 \text{ cm} = 1.792 \text{ cm}^3$

Jadi, volume prisma adalah 1.792 cm^3.

3. Menentukan Volume Prisma Tegak dan Limas Beraturan Jika Ukuran Rusuknya Berubah

Kalian telah mempelajari cara menentukan volume prisma dan limas. Bagaimana jika panjang rusuk-rusuknya berubah? Apakah volumenya juga ikut berubah? Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Gambar 9.23

Perhatikan Gambar 9.23. Gambar tersebut menunjukkan tiga buah prisma tegak segi empat beraturan dengan ukuran rusuk yang berlainan. Dari gambar tersebut diperoleh

a) volume prisma (i) = luas alas $\times$ tinggi

$= 2^2 \times 3$

$= 12 \text{ cm}^3$

b) volume prisma (ii) $= 4^2 \times 6$

$= 96 \text{ cm}^3$

c) volume prisma (iii) $= 6^2 \times 9$

$= 324 \text{ cm}^3$

Sekarang bandingkan panjang rusuk alas prisma (i), (ii), dan (iii). Kalian akan memperoleh

(i) panjang rusuk prisma (ii) = 2 $\times$ panjang rusuk prisma (i)

(Menumbuhkan inovasi)

Diskusikan dengan temanmu.

Ada dua prisma segitiga siku-siku, yaitu prisma A dan prisma B. Tinggi kedua prisma sama panjang. Jika panjang sisi siku-siku terpendek prisma A sama dengan tiga kali panjang sisi siku-siku terpendek prisma B, dan sisi siku-siku yang lain sama panjang maka tentukan perbandingan volume prisma A dan prisma B.

volume prisma (ii) $= 2^3 \times 12 \text{ cm}^3$
$= 96 \text{ cm}^3$
$= 2^3 \times$ volume prisma (i)

(ii) panjang rusuk prisma (iii) = 3 × panjang rusuk prisma (i)

volume prisma (iii) $= 3^3 \times 12 \text{ cm}^3$
$= 324 \text{ cm}^3$
$= 3^3 \times$ volume prisma (i)

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika panjang rusuk alas suatu prisma segi empat beraturan = s, tinggi = t, dan volume = V, kemudian panjang rusuk alas dan tingginya diperbesar atau diperkecil k kali maka

$$\begin{aligned} V_{\text{baru}} &= ks \times ks \times kt \\ &= k^3 \times s^2 \times t \\ &= k^3 \times \text{luas alas} \times t \\ &= k^3 V \end{aligned}$$

dengan

V_{baru} = volume prisma segi empat beraturan setelah diperbesar atau diperkecil
V = volume prisma segi empat beraturan semula
k = konstanta positif (perbesaran atau perkecilan)

Dengan cara yang sama, kalian dapat menentukan volume limas beraturan jika ukuran rusuknya diubah.

Suatu limas segi empat beraturan memiliki panjang rusuk alas = s dan tinggi = t. Kemudian ukuran limas diubah menjadi panjang rusuk alas = ks dan tinggi = kt, dengan k konstanta.

Kalian akan memperoleh

- $V = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$

  $V = \frac{1}{3} \times s^2 \times t$

- $V_{baru} = \frac{1}{3} \times (ks)^2 \times (kt)$

  $= k^3 \times \frac{1}{3} \times s^2 \times t$

  $= k^3 V$

Kalian dapat mencoba pada limas yang lain dengan syarat alasnya harus beraturan. Kalian akan menyimpulkan bahwa

$$V_{baru} = k^3 V.$$

(Menumbuhkan inovasi)

Buatlah kelompok terdiri atas 4 orang, 2 pria dan 2 wanita. Diskusikan hal berikut. Cobalah kasus di samping pada prisma segitiga beraturan, prisma segilima beraturan, dan prisma segi enam beraturan. Apakah kalian juga menyimpulkan bahwa volume prisma yang baru = $k^3 \times$ volume prisma semula, dengan k = perbesaran/perkecilan?

dengan

V_{baru} = volume limas setelah panjang rusuk dan tingginya diubah

V = volume limas semula

k = konstanta positif (perbesaran atau perkecilan)

a. Sebuah prisma tegak segi empat beraturan panjang rusuk alasnya 9 cm dan tinggi 6 cm. Kemudian rusuk dan tingginya diperkecil sebesar $\frac{1}{3}$ kali panjang rusuk dan tinggi semula. Berapa volume prisma itu sekarang?

b. Sebuah limas alasnya berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya 6 cm dan 8 cm, serta tinggi 12 cm.Kemudian, panjang sisi alas maupun tinggi limas diperbesar dengan faktor perbesaran 2. Hitunglah volume limas itu sekarang.

Penyelesaian:

a. $V = \text{luas alas} \times t$

$= 9^2 \times 6 = 486 \text{ cm}^3$

$k = \frac{1}{3}$

$V_{\text{baru}} = k^3 \times V$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 486 \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3$

Jadi, volume prisma setelah diperkecil adalah 18 cm^3.

b. $V = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \text{alas segitiga} \times \text{tinggi segitiga}\right) \times t$

$= \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8\right) \times 12$

$= 24 \times 12 = 288 \text{ cm}^3$

$k = 2$

$V_{baru} = k^3 V$

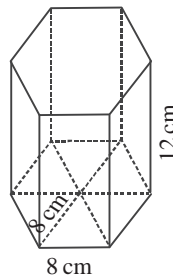
$= 2^3 \times 288$

$= 2.304 \text{ cm}^3$

Uji Kompetensi 5

Kerjakan soal-soal berikut di buku tugasmu.

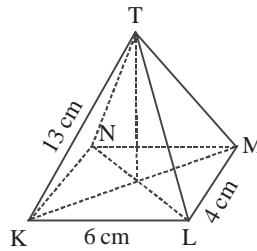
1. Sebuah prisma tegak memiliki volume 432 cm^3. Alas prisma tersebut berbentuk segitiga siku-siku yang panjang sisi siku-sikunya 6 cm dan 8 cm. Hitung tinggi prisma tersebut.

2.

Gambar di samping merupakan prisma segi enam beraturan. Hitunglah
a. luas alas prisma;
b. volume prisma.

3. Sebuah lapangan berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 70 m dan lebar 65 m. Lapangan tersebut digenangi air setinggi 30 cm. Berapa liter air yang menggenangi lapangan itu?

   (1 liter = 1 dm^3).

4. Sebuah limas T.ABCD alasnya berbentuk trapesium dengan AB // CD. Panjang AB = 6 cm, CD = 8 cm, dan tinggi trapesium 4 cm. Jika tinggi prisma 15 cm, hitunglah
   a. luas alas limas;
   b. volume limas.

5. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Hitunglah
   a. tinggi limas;
   b. luas permukaan limas;
   c. luas bidang diagonal TLN;
   d. volume limas.

Rangkuman

1. Nama prisma dan limas didasarkan pada bentuk bidang alasnya.
2. Luas sisi prisma = (2 × luas alas) + (keliling alas × tinggi).
3. Luas sisi limas = luas alas + jumlah luas seluruh sisi tegak.
4. Volume prisma = luas alas × tinggi.
5. Volume limas = $\frac{1}{3}$ × luas alas × tinggi

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, apakah kalian sudah paham mengenai *Bangun Ruang Sisi Datar Limas dan Prisma Tegak*? Jika kalian sudah paham, coba rangkum kembali materi ini dengan kata-katamu sendiri. Jika ada materi yang belum kamu pahami, catat dan tanyakan kepada temanmu yang lebih tahu atau kepada gurumu. Catat pula manfaat apa saja yang dapat kalian peroleh dari materi ini. Buatlah dalam sebuah laporan dan serahkan kepada gurumu.

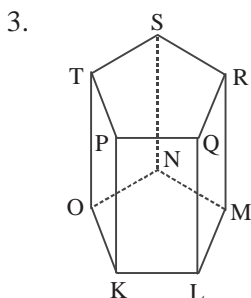
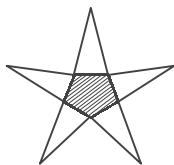
Evaluasi 9

Kerjakan di buku tugasmu.

A. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat.

1. Banyaknya titik sudut pada prisma segitiga adalah ....
   a. 6 buah c. 10 buah
   b. 8 buah d. 12 buah

2. Banyaknya rusuk alas pada limas segi empat adalah ....
   a. 3 buah c. 7 buah
   b. 4 buah d. 8 buah

3.

   Perhatikan gambar prisma segi lima beraturan di atas.
   Pernyataan di bawah ini benar, *kecuali* ....
   a. rusuk-rusuk tegaknya adalah KP, LQ, MR, NS, dan OT
   b. bidang KLMNO kongruen dengan bidang PQRST
   c. bidang KMRP dan KNSP merupakan bidang diagonal
   d. diagonal bidang alasnya ada 4 buah

4.
   Gambar di samping merupakan jaring-jaring ....
   a. limas segi lima beraturan
   b. limas segi enam beraturan
   c. prisma segi lima beraturan
   d. prisma segi enam beraturan

5. Suatu prisma alasnya berbentuk segitiga dengan panjang sisi 3 cm, 4 cm, dan 5 cm. Jika tinggi prisma 15 cm, volume prisma adalah ....
   a. 90 cm^3 c. 250 cm^3
   b. 200 cm^3 d. 300 cm^3

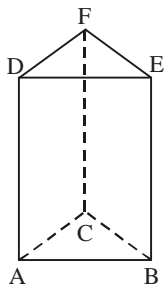
6. Diketahui luas permukaan prisma tegak segi empat beraturan 864 cm^2 dan tinggi prisma 12 cm. Panjang sisi alas prisma adalah ....
   a. 8 cm c. 12 cm
   b. 10 cm d. 14 cm

7. Diketahui suatu limas dengan alas berbentuk persegi. Luas alas limas 144 cm^2 dan tinggi limas 8 cm. Luas permukaan limas adalah ....
   a. 204 cm^2 c. 484 cm^2
   b. 384 cm^2 d. 1.152 cm^2

8. Diketahui volume suatu prisma 450 cm^3. Alas prisma berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi 5 cm, 13 cm, dan 12 cm. Tinggi prisma adalah ....
   a. 12 cm c. 14 cm^2
   b. 13 cm d. 15 cm

9. Jika suatu limas luas alasnya 240 cm^2 dan tinggi 30 cm maka volume limas adalah ....
   a. 2.400 cm^3 c. 4840 cm^3
   b. 4.400 cm^3 d. 7.200 cm^3

10. Suatu limas memiliki alas berbentuk persegi panjang dengan ukuran 25 cm $\times$ 15 cm. Jika tinggi limas 7 cm, volume limas adalah ....
    a. 262,5 cm^3 c. 870 cm^2
    b. 484 cm^3 d. 875 cm^3

11.

Diketahui prisma tegak segitiga ABC.DEF dengan AB = 15 dm, BC = 12 dm, dan AC = 9 dm. Jika tinggi prisma itu 2 dm, volumenya adalah ....

a. 108 liter
b. 216 liter
c. 540 liter
d. 1.080 liter

12. Pada prisma tegak segi empat ABCD.EFGH, sisi alas ABCD berupa trapesium sama kaki dengan AB//CD, AB = 10 cm, CD = 4 cm, dan AD = 5 cm. Jika luas semua sisi tegaknya 216 cm^2 maka volume prisma itu adalah ....

a. 252 cm^3
b. 320 cm^3
c. 560 cm^3
d. 600 cm^3

13. Diketahui limas segi empat beraturan T.ABCD, dengan AB = 8 cm dan luas bidang TAB = 24 cm^2. Volume limas itu adalah ....

a. 94,3 cm^3
b. 94,5 cm^3
c. 95,4 cm^3
d. 96 cm^3

14. Alas sebuah prisma berbentuk belah ketupat, dengan salah satu panjang diagonalnya adalah 10 cm dan panjang semua sisi tegaknya adalah 12 cm. Jika volume prisma itu 600 cm^3, luas sisi prisma itu adalah ....

a. $\left(64+5\sqrt{2}\right)$ cm^2
b. $\left(72+15\sqrt{2}\right)$ cm^2
c. $\left(96+32\sqrt{2}\right)$ cm^2
d. $\left(100+240\sqrt{2}\right)$ cm^2

15. Sebuah prisma tegak segitiga luas bidang alasnya 24 cm^2 dan luas bidang sisi-sisinya adalah 150 cm^2, 120 cm^2, dan 90 cm^2. Volume prisma itu adalah ....

a. 90 cm^3
b. 120 cm^3
c. 220 cm^3
d. 360 cm^3

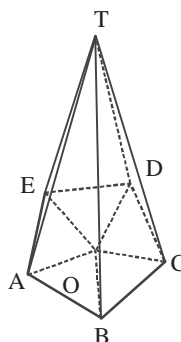
B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat dan tepat.

1. Gambarlah prisma segi enam beraturan ABCDEF.GHIJKL. Tentukan
   a. rusuk-rusuk tegaknya;
   b. semua diagonal bidang alas;
   c. semua diagonal ruangnya.

2. Limas segi empat beraturan mempunyai luas alas 256 cm^2. Jika tinggi limas 6 cm, tentukan luas permukaan limas tersebut.

3. Diketahui alas sebuah prisma berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya 8 cm dan 6 cm. Jika tinggi prisma 18 cm, tentukan luas permukaan prisma.

4. Suatu kolam renang mempunyai ukuran panjang 40 m dan lebar 15 m. Kedalaman air pada ujung yang paling dangkal 1,3 m dan ujung yang paling dalam 2,7 m. Berapa liter volume air dalam kolam renang tersebut?

5.

Suatu limas segi lima beraturan T.ABCDE tampak seperti gambar di samping. Panjang AB = 16 cm, OA = 10 cm, dan tinggi limas 20 cm. Hitunglah
   a. luas alas limas;
   b. volume limas.

DAFTAR PUSTAKA

Baisuni, H.M. Hasyim. 1986. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Friedberg, Stephen H, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence. 1997. *Linear Algebra Third Edition*. Prentice-Hall International, Inc.

Hyatt, Herman R, Irving Drooyam, Charles C. Carico. 1979. *Introduction to Technical Mathematics A Calculator Approach*. New York: John Wiley & Sons.

Keedy, Mervin L, Marvin L. Bittinger. 1986. *A Problem Solving Approach to Intermediate Algebra Second Edition*. Addison – Wesley Publishing Company.

Kerami, Djati dan Cormentyna Sitanggang. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Lafferty, Peter. 2001. *Jendela Iptek*. Jakarta: Balai Pustaka.

Lipschutz, Seymour, Ph.D, Marc Lars Lipson Ph.D. Alih Bahasa Refina Indriasari, S.T., M.Sc. 2006. *Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Munir, Rinaldi, Ir. 2001. *Matematika Diskrit*. Bandung: CV. Informatika.

Negoro, ST. dan B. Harahap. 1999. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Rich, Barnett Alih Bahasa Irzam Harmein S.T. 2005. *Geometri*. Jakarta: Erlangga.

Saleh, Samsubar. 2001. *Statistik Induktif*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

Spiegeel, M.R. 1990. *Theory and Problem of College Algebra*. McGraw-Hill Publishing Company.

Supranto, J, M.A. 2000. *Statistik: Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Tim Penyusun. 2002. *Ilmu Pengetahuan Populer*. Grolier International, Inc.

Tjahjono, Gunawan. 2002. *Indonesian Heritage*. Grolier International, Inc.

Wahyudin, DR. dan Drs. Sudrajat M.Pd. 2003. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: CV. Tarity Samudra Berlian.

—————————. 2003. *Ensiklopedi Matematika untuk SLTP*. Jakarta: CV. Tarity Samudra Berlian.

GLOSARIUM

absis : nilai x pada pasangan bilangan koordinat Cartesius (x, y). Nilai x terletak pada sumbu X suatu bidang koordinat Cartesius, 61, 71

bidang diagonal : bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang suatu bangun ruang, 205, 206, 227

busur : garis lengkung yang merupakan bagian dari suatu keliling lingkaran, 139, 140, 149, 154, 155, 156, 157

diagonal ruang : ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang, 130, 131, 132

diagonal sisi (bidang) : ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan pada setiap bidang atau sisi, 130, 132, 205, 206, 227, 228

domain : anggota daerah asal pada suatu pemetaan (fungsi), 38, 39

eliminasi : suatu sistem untuk menentukan himpunan penyelesaian persamaan/pertidaksamaan atau sistem persamaan/pertidaksamaan dengan cara mengeliminasi salah satu variabel, 104, 105, 107

faktor : suatu bilangan yang dapat membagi habis bilangan lain, kecuali nol, 14, 15, 16, 26

faktorisasi : menyatakan suatu bentuk penjumlahan menjadi bentuk perkalian, 16

faktor sekutu : faktor yang sama (sekutu) dari dua bilangan atau lebih, 14, 15, 16, 26

fungsi linear : fungsi yang dapat dinyatakan sebagai $f(x) = ax + b$, 44, 45, 49, 82, 83

garis bagi : garis yang membagi sebuah sudut segitiga menjadi dua sama besar. Garis bagi sebuah segitiga berpotongan di satu titik, 185

garis tinggi : garis yang ditarik dari sebuah sudut dalam segitiga yang membagi sisi di hadapannya sama panjang, 189

gradien : kecondongan atau kemiringan suatu garis lurus. Gradien dilambangkan dengan m, di mana $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73

juring : disebut juga sektor, yaitu daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur pada lingkaran, 139

kalimat terbuka : kalimat yang belum diketahui nilai kebenarannya (benar atau salah), 98

kodomain : anggota daerah kawan pada suatu pemetaan (fungsi), 38, 39

kongruen : disebut juga sama dan sebangun. Dua bangun datar dikatakan kongruen apabila bentuk kedua bangun itu sebangun dan sama besar, 213, 224

konsentris : dua buah lingkaran yang setitik pusat (pusatnya sama), 177

koordinat Cartesius : koordinat titik yang dinyatakan dengan pasangan titik (x, y), di mana x absis dan y ordinat. Absis diwakili oleh titik-titik di sumbu X dan ordinat diwakili oleh titik-titik di sumbu Y, 33, 34, 35, 36

ordinat : nilai y pada pasangan bilangan koordinat Cartesius (x, y). Nilai y terletak pada sumbu Y suatu bidang koordinat Cartesius, 61, 71

pecahan bersusun (kompleks) : suatu pecahan yang pembilang atau penyebutnya atau kedua-duanya masih memuat pecahan, 27, 28

prisma miring : prisma yang rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus terhadap bidang alas dan bidang atas. Prisma miring disebut juga prisma condong, 224

prisma tegak : prisma yang rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas dan bidang atas, 224, 225

range : disebut juga daerah hasil, yaitu anggota dari daerah kawan yang mempunyai kawan di daerah asal suatu pemetaan (fungsi), 38, 39

segitiga lancip : segitiga yang salah satu sudutnya adalah sudut lancip, 124, 125

segitiga siku-siku : segitiga yang salah satu sudutnya adalah sudut siku-siku, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126

segitiga tumpul : segitiga yang salah satu sudutnya adalah sudut tumpul, 124, 125

substitusi : penggantian suatu variabel dengan nilai tertentu untuk memperoleh penyelesaian suatu persamaan atau pertidaksamaan, 38, 39, 77, 81, 87, 88, 106

sudut keliling : sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran, 153, 154, 155, 156, 157, 159

sudut pusat : sudut yang titik sudutnya berupa titik pusat lingkaran dan kaki-kakinya adalah jari-jari lingkaran itu, 153, 154, 155, 156, 163, 164

KUNCI JAWABAN SOAL TERPILIH

BAB 1

Uji Kompetensi 3

1. a. $2x + 8$
   c. $15x + 10y$
   e. $-4a^3 + 8a^2b$
   g. $-p^4 + 3p^3$
3. a. $2x^2 - 5x - 12$
   c. $10m^2 + 18m - 4$
   d. $3x^3 + 2y^3 + 4x^2y + 3xy^2$
   g. $a^2 - b^2 + a^2b - ab^2$

Uji Kompetensi 7

1. $(x - 4)(x - 2)$
3. $(x + 4)(x + 3)$
5. $(a + 6)(a + 2)$
7. $(p - 6)(p - 2)$
9. $(p - 2)(p - 2)$
11. $(x - 3)(x - 3)$
13. $(a - 5)(a + 3)$
15. $(a + 8)(a - 3)$
17. $(b - 4)(b + 2)$
19. $(n + 4)(n - 2)$

Evaluasi 1

A. 1. b 9. d
   2. a 11. d
   5. d 13. c
   7. c 15. d

B. 1. a. $8x^2 + xy^2 - 1$
      c. $-5p - 13$
      e. $21a - 24b$
   3. a. $(x + 8)(x - 2)$
      c. $(p - 4q^2)(p + 4q^2)$
      e. $(7x - 2)(7x - 2)$
   5. a. $(2x - 4)$ cm
      b. $a = 5$ cm, $t = 2$ cm

BAB 2

Uji Kompetensi 3

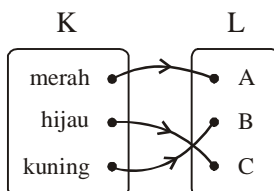
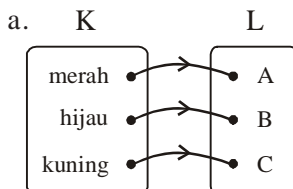
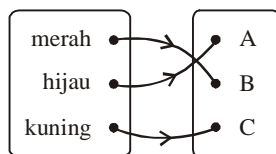
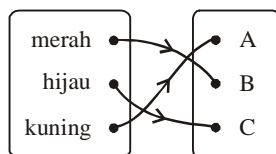
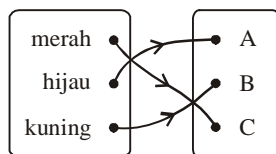
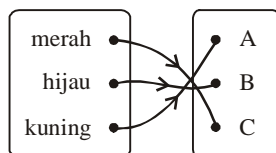
1. (i) dan (iv)
3. a. {1}
   d. {1, 4}
5. a, b, dan d

Uji Kompetensi 7

1. $f(x) = 2x - 2$
3. a. $f(x) = 2x + 1$
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$
   c. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$
7. a. $f(-1) = 5$
   b. $x = 1$

Evaluasi 2

A. 1. c 7. b
   3. b 9. b
   5. c

B. 1. a. {(2, 4), (4, 16), (6, 36), (8, 64)}
      c. {2, 4, 6, 8}
      e. {4, 16, 36, 64}
   3. a.

5. a. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
   c. 2

BAB 3

Uji Kompetensi 4

1. a. tidak didefinisikan
   c. tidak didefinisikan
   e. 0
3. a. $m = \frac{2}{3}$
   b. $m = \frac{4}{3}$

Uji Kompetensi 5

1. a. $y = 2x + 1$
   c. $x + 2y = 3$
3. a. $5x + 4y = 7$
   b. $4x - 9y = 1$
5. a. $y = \frac{1}{2}x + 4$
   b. $4x - 3y + 7 = 0$

Evaluasi 3

A. 1. b 7. b
   3. d 9. a
   5. b

B. 1. a. $a = -3$
      b. $b = \frac{3}{16}$
   3. a. $5x - 4y + 20 = 0$
      b. $6x + 5y + 30 = 0$
   5. a. $a = 3$ atau $a = -4$
      b. $a = 3 \rightarrow y = \frac{5}{2}x$
      $a = -4 \rightarrow y = -\frac{5}{11}x$

BAB 4

Uji Kompetensi 4

1. Hp = {(0, 1)}
3. Hp = {(2, 1)}
5. Hp = {(4, 8)}
7. Hp = {(7, 1)}
9. Hp = { }

Uji Kompetensi 8

1. $x = \pm 1$ dan $y = 0$
3. $x = \frac{49}{9}$ dan $y = \frac{25}{9}$
5. $x = 1$ dan $y = 1$

Evaluasi 4

A. 1. d 9. a
   3. b 11. d
   5. b 13. b
   7. d 15. b

B. 1. a. Hp = {(0, –6), (9, 0), (–3, –8), (–2, –7,3), (–1, –6, 6), (3, –4)}
      c. Hp = $\left\{\frac{21}{8}\right\}$
   3. a. Hp = {(2, 1)}
      c. Hp = $\left\{\left(-5, -\frac{1}{3}\right)\right\}$
      e. Hp = $\left\{\left(-1, \frac{7}{3}\right)\right\}$
   5. umur ibu = 33 tahun
      umur anak = 17 tahun

BAB 5

Uji Kompetensi 3

1. a. segitiga tumpul
   c. segitiga siku-siku
   e. segitiga siku-siku
   g. segitiga siku-siku
5. a. PR = $2\sqrt{5}$ cm
   b. QR = $4\sqrt{5}$ cm

Uji Kompetensi 5

1. a. AB = $8\sqrt{3}$ cm
      CD= 16 cm
   b. $128\sqrt{3}$ cm^2
3. a. L. ACGE = 40 cm^2
      Keliling ACGE = 28 cm
   b. AG = $2\sqrt{29}$ cm
5. b. B(2, –4) dan D(7, 1)
   c. BC = 5 satuan panjang
      AC = $5\sqrt{2}$ satuan panjang

Evaluasi 5

A. 1. b 9. c
   3. b 11. d
   5. d 13. c
   7. a 15. c

B. 1. a. $x = 3\sqrt{3}$ cm
      c. $x = 25{,}6$ cm
   3. 35 cm
   5. b. 360,6 km

BAB 6

Uji Kompetensi 3

1. a. 1.386 cm^2
   c. 7.546 cm^2
   e. 38,5 m^2
3. a. 119 cm^2
   c. 43 cm^2
5. Rp11.088.000,00

Uji Kompetensi 5

1. $\overset{\frown}{CD} = 56$ cm
3. a. 10,47 cm
   b. 157 cm^2
5. a. K = 23,35 cm
      L = 33,36 cm^2
7. 67,5°

Evaluasi 6

A. 1. c 7. d
3. c 9. b
5. c

B. 1. K = 44 cm
L = 308 cm^2
3. a. $L_1 : L_2 = 1 : 4$
c. $K_1 : K_2 = 1 : 2$
5. a. 62.800 km
c. 3.591 km

BAB 7

Uji Kompetensi 1

1. Garis *k*, *l*, dan *p*
5. a. 24 cm
c. 18,47

Uji Kompetensi 3

1. 100 cm
3. 438,72 cm
5. 48,84 cm

Evaluasi 7

A. 1. d 7. d
3. c 9. a
5. b

B. 1. a. 15,5 cm
b. 11 cm
3. b. 8,4 cm
5. a. 7 cm
c. 22,14 cm

BAB 8

Uji Kompetensi 3

1. 13 cm
3. 208 cm
5. a. 260 cm
b. Rp390.000,00

Uji Kompetensi 5

1. a. 96 cm^2
b. 600 cm^2
2. 9 : 25
3. 40,5 cm

Evaluasi 8

A. 1. d 9. c
3. b 11. d
5. d 13. d
7. b 15. d

B. 3. a. $V_1 = 8\ m^3$,
$V_2 = 8.000\ cm^3$
b. 1.000 buah
5. a. 24.000 cm^3
b. 92 cm

BAB 9

Uji Kompetensi 3

1. a. 540 cm^2
c. 2.106 cm^2
3. a. 10 cm
c. 912 cm^2
5. 560 cm^2

Uji Kompetensi 5

1. 10 cm
3. 1.365.000 liter
5. a. $3\sqrt{13}$ cm
b. 39 cm^2

Evaluasi 9

A. 1. d 7. b
3. c 9. b
5. c

B. 3. 480 cm^2
5. a. 240 cm^2
b. 1.600 cm^3

DAFTAR SIMBOL

Notasi	Keterangan
$+$	Jumlah; tambah; menambah; positif, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
$-$	Kurang; mengurang; negatif, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16
$\times$	Kali; mengali, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
$:$	Bagi; membagi; banding, 15, 25, 127, 129
$(\ )$	Kurung biasa, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
$\{\ \}$	Akolade; kurung kurawal; menyatakan himpunan, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 44
$>$	Lebih dari, 124, 125, 147, 177, 179
$<$	Kurang dari, 44, 124, 125, 177
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan, 46, 48, 50
$=$	Sama dengan, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21
$\neq$	Tidak sama dengan, 20, 21, 22, 87, 96, 97, 99
a^2	a pangkat dua atau a kuadrat, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
a^3	a pangkat tiga, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 26, 43, 215, 216, 217, 238, 239
a^n	a pangkat n, 11, 43
$\sqrt{\ }$	Akar pangkat dua, 122, 127, 128, 129, 130, 131, 133
$\in$	Anggota dari; elemen dari, 96, 97
Δ	Segitiga, 118, 123, 151, 175, 187, 188, 190, 191, 192, 193, 194, 225, 226, 233
$\llcorner$, $\lrcorner$	Siku-siku, 139, 153, 160, 174, 175
$\Leftrightarrow$	Ekuivalen; jika dan hanya jika, 74, 77, 78, 79, 81, 83, 96, 97, 106, 107
$^\circ$	Derajat, 123, 126, 127, 128, 144, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165
$\overline{AB}$	Ruas garis AB, 130, 131, 139, 160, 161, 184, 201, 204, 205, 206, 207, 208, 225
$//$	Sejajar; garis sejajar, 72, 73, 78, 204, 205
$\perp$	Tegak lurus, garis tegak lurus, 74, 75, 79, 139, 171, 174, 184, 187
$\angle$	Sudut, 123, 126, 127, 128, 129, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157
π	Dibaca: pi, nilai pendekatan $\pi = 3{,}14$ atau $\frac{22}{7}$, 140, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 148
$\rightarrow$	Pemetaan; fungsi; $f: R \rightarrow R$ dibaca = fungsi f memetakan dari R ke R, 38, 40, 44, 46, 48
$n!$	n faktorial, 52
$\overset{\frown}{AB}$	Busur AB, 139, 149, 150, 151, 152, 153, 185, 186

INDEKS ISTILAH

INDEKS PENGARANG